

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University**

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
GRADUATION THESIS**

Акустические рассеяние и силы в ансамбле сферических частиц

Обучающийся / Student Клещенко Всеволод Дмитриевич

Факультет/институт/кластер/ Faculty/Institute/Cluster физический факультет

Группа/Group Z34434

Направление подготовки/ Subject area 16.03.01 Техническая физика

Образовательная программа / Educational program Техническая физика 2019

Язык реализации ОП / Language of the educational program Русский

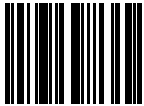
Статус ОП / Status of educational program

Квалификация/ Degree level Бакалавр

Руководитель ВКР/ Thesis supervisor Петров Михаил Игоревич, PhD, физико-математические науки, Университет ИТМО, физический факультет, старший научный сотрудник

Консультант/ Consultant Ладутенко Константин Сергеевич, ФизФ, научный сотрудник, неосн по совм., ФизФ, научный сотрудник, неосн по совм., кандидат физико-математических наук

Обучающийся/Student

Документ подписан	
Клещенко Всеволод Дмитриевич	
29.05.2023	

(эл. подпись/ signature)

Клещенко
Всеволод
Дмитриевич

(Фамилия И.О./ name
and surname)

Руководитель ВКР/
Thesis supervisor

Документ подписан	
Петров Михаил Игоревич	
26.05.2023	

(эл. подпись/ signature)

Петров Михаил
Игоревич

(Фамилия И.О./ name
and surname)

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University**

**ЗАДАНИЕ НА ВЫПУСКНУЮ КВАЛИФИКАЦИОННУЮ РАБОТУ /
OBJECTIVES FOR A GRADUATION THESIS**

Обучающийся / Student Клещенко Всеволод Дмитриевич

Факультет/институт/кластер/ Faculty/Institute/Cluster физический факультет

Группа/Group Z34434

Направление подготовки/ Subject area 16.03.01 Техническая физика

Образовательная программа / Educational program Техническая физика 2019

Язык реализации ОП / Language of the educational program Русский

Статус ОП / Status of educational program

Квалификация/ Degree level Бакалавр

Тема ВКР/ Thesis topic Акустические рассеяние и силы в ансамбле сферических частиц

Руководитель ВКР/ Thesis supervisor Петров Михаил Игоревич, PhD, физико-математические науки, Университет ИТМО, физический факультет, старший научный сотрудник

Консультант/ Consultant Ладутенко Константин Сергеевич, ФизФ, научный сотрудник, неосн по совм., ФизФ, научный сотрудник, неосн по совм., кандидат физико-математических наук

Основные вопросы, подлежащие разработке / Key issues to be analyzed

Цель:

Исследовать акустические рассеяние и силы в ансамблях сферических частиц и реализовать быстрый метод для моделирования задачи.

Задачи:

- Описать аналитически метод Т матриц для решения задачи рассеяния акустической волны в мультипольном представлении на твердых и жидких сферических частицах в открытом пространстве (воздухе или жидкости)
- Получить формулы для вычисления сечения рассеяния через коэффициенты мультипольного разложения падающих и рассеянных полей
- Получить формулы для вычисления акустических силы, действующих на частицы, через коэффициенты мультипольного разложения падающих и рассеянных полей
- Написать программную реализацию для моделирования акустического рассеяния в данной системе, а также вычисления сечений рассеяния и акустических сил на языке программирования Python
- Верифицировать результаты, полученные с помощью написанной реализации, сравнив с моделированием в COMSOL Multiphysics
- Исследовать рассеяние плоской акустической волны на одной резонансной частице, эффект направленного рассеяния
- Исследовать рассеяние на 3 резонансных частицах в стоячей волне, эффект связывания

Литература:

- Martin P.A., Multiple Scattering. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2006
- Lopes J.H., Azarpeyvand M., Silva G.T., Acoustic interaction forces and torques acting on suspended spheres in an ideal fluid. IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control 2016
- Sapozhnikov OA, Bailey MR, Radiation force of an arbitrary acoustic beam on an elastic sphere in a fluid. J Acoust Soc Am. 2013
- Shenwei Zhang et al, Acoustically mediated long-range interaction among multiple spherical particles exposed to a plane standing wave, New J. Phys. 2016
- Hong-Wei Wu et al. Acoustic generalized Kerker effect. Appl. Phys. Express 2021
- Amos Egel et al, SMUTHI: A python package for the simulation of light scattering by multiple particles near or between planar interfaces, J. of Quant. Spectr. and Rad. Transfer, 2021

Форма представления материалов ВКР / Format(s) of thesis materials:

- ВКР
- Презентация
- Программный код (репозиторий проекта)

Дата выдачи задания / Assignment issued on: 15.01.2023

Срок представления готовой ВКР / Deadline for final edition of the thesis 20.05.2023

Характеристика темы ВКР / Description of thesis subject (topic)

Тема в области фундаментальных исследований / Subject of fundamental research: нет / not

Тема в области прикладных исследований / Subject of applied research: да / yes

СОГЛАСОВАНО / AGREED:

Руководитель ВКР/
Thesis supervisor

Документ подписан	
Петров Михаил Игоревич	
09.03.2023	

(эл. подпись)

Петров Михаил
Игоревич

Задание принял к
исполнению/ Objectives
assumed BY

Документ подписан	
Клещенко Всеволод Дмитриевич	
09.03.2023	

(эл. подпись)

Клещенко
Всеволод
Дмитриевич

Руководитель ОП/ Head
of educational program

Документ подписан	
Белов Павел Александрович	
18.05.2023	

(эл. подпись)

Белов Павел
Александрович

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University**

**АННОТАЦИЯ
ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
SUMMARY OF A GRADUATION THESIS**

Обучающийся / Student Клещенко Всеволод Дмитриевич

Факультет/институт/кластер/ Faculty/Institute/Cluster физический факультет

Группа/Group Z34434

Направление подготовки/ Subject area 16.03.01 Техническая физика

Образовательная программа / Educational program Техническая физика 2019

Язык реализации ОП / Language of the educational program Русский

Статус ОП / Status of educational program

Квалификация/ Degree level Бакалавр

Тема ВКР/ Thesis topic Акустические рассеяние и силы в ансамбле сферических частиц

Руководитель ВКР/ Thesis supervisor Петров Михаил Игоревич, PhD, физико-математические науки, Университет ИТМО, физический факультет, старший научный сотрудник

Консультант/ Consultant Ладутенко Константин Сергеевич, ФизФ, научный сотрудник, неосн по совм., ФизФ, научный сотрудник, неосн по совм., кандидат физико-математических наук

**ХАРАКТЕРИСТИКА ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
DESCRIPTION OF THE GRADUATION THESIS**

Цель исследования / Research goal

Разработка пакета для исследования акустических сил и рассеяния в ансамблях сферических частиц.

Задачи, решаемые в ВКР / Research tasks

а) Описать аналитически метод Т матриц для решения задачи рассеяния акустической волны на сжимаемых сферических частицах в открытом пространстве в воздухе или в жидкой среде. б) Написать пакет для эффективного моделирования акустического рассеяния на ансамблях сферических частиц, а также вычисления сечений рассеяния и акустических сил на языке программирования Python. в) Исследовать численно и аналитически эффекты акустического связывания резонансных частиц в стоячей волне.

Краткая характеристика полученных результатов / Short summary of results/findings


В результате работы над данным проектом все цели были достигнуты, получен научный результат.

Наличие выступлений на конференциях по теме выпускной работы / Conference reports on the topic of the thesis

1. XXXV сессия Российского акустического общества, 13.02.2023 - 17.02.2023

(Конференция, статус - всероссийский)

Обучающийся/Student

Документ подписан	
Клещенко Всеволод Дмитриевич	
29.05.2023	

(эл. подпись/ signature)

Клещенко
Всеволод
Дмитриевич

(Фамилия И.О./ name
and surname)

Руководитель ВКР/
Thesis supervisor

Документ подписан	
Петров Михаил Игоревич	
26.05.2023	

(эл. подпись/ signature)

Петров Михаил
Игоревич

(Фамилия И.О./ name
and surname)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
1 Реализация метода T-матриц.....	10
1.1 Основы метода	10
1.2 Вычисление интегральных величин	14
1.3 Вычисление коэффициентов переноса.....	16
1.4 Анализ сходимости.....	17
1.5 Время работы	21
1.6 Верификация	22
2 Акустическое связывание.....	26
2.1 Исследование	26
2.2 Монопольное взаимодействие	30
2.3 Анализ	34
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	38
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	39
ПРИЛОЖЕНИЕ А (Сферические функции)	42
ПРИЛОЖЕНИЕ Б (Акустическое связывание трех частиц).....	44

ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие акустических полей с объектами, находящимися в некоторой среде, сопровождается возникновением различных видов акустических сил, действующих на эти объекты. Знание о возникающих силах, действующих на частицы, дает возможность определять их поведение в акустических полях, а также воздействовать на них. Устройства, позволяющие манипулировать объектами, благодаря их взаимодействию с акустической волной, называются акустическими пинцетами и представляют собой активно развивающееся направление [1]. Акустические пинцеты полезны для различных медицинских приложений [2], таких как, например, разделение клеток крови, выделение паразитирующих клеток, а также для изготовления материалов, очистки воды, поскольку позволяют решать такие задачи как сортировка, разделение, транспортировка различных, в том числе биологических частиц. Аналогичные вопросы уже исследовались в оптике, а оптический пинцет [3] был предложен еще в 1986 году. Акустические поля позволяют воздействовать на большие объекты, тем самым расширяя диапазон размеров захватываемых объектов оптическими пинцетами [2], хоть и обеспечивают худшее пространственное разрешение [4]. Так, при рассеянии на объектах полей, создаваемых источниками одинаковой мощности, в акустике могут возникать силы на пять порядков сильнее, чем в оптике, что обусловлено различием в скорости распространения волн. Также акустические пинцеты являются более безопасными для манипулирования живыми клетками, поскольку не требуют использования высокомошных лазеров, применяющихся в оптических пинцетах.

Для манипулирования объектами с помощью акустических полей необходимо уметь определять силы, действующие на эти объекты при помещении их в звуковое поле. Рассеяния звуковых волн в случае маленьких объектов было впервые математически описано в [5]. Задача рассеяния акустической волны на уединенной сферической частице уже была решена [6],[7], однако больший практический интерес представляет решение задачи рассеяния на ансамбле частиц, где при достаточно близком расположении частиц, возникают различные эффекты, обусловленные перерассеянием волн на частицах. Для двух частиц, задачу можно решить аналитически [8], но при дальнейшем увеличении числа рассеивателей, задача становится более сложной, и для

ее решения применяются различные численные методы. Наиболее классическими являются конечно-разностные методы и метод конечных элементов [9], [10], в которых физическая область решения разбивается дискретной сеткой или набором элементов. Для точного решения задачи необходимо достаточно плотное разбиение, что приводит к большому числу элементов и становится особенно проблематичным в трехмерных задачах, в случае достаточно удаленных друг от друга частиц. Также существуют методы, основанные не на пространственной дискретизации, а на поверхностной, что упрощает вычисления, например, метод фундаментальных решений [11]. Однако, еще более эффективным является подход, основанный на мультипольном разложении полей, полностью не требующий разбиения, поскольку он позволяет решать задачу одновременно во всех точках пространства. Также преимуществом этого подхода является возможность полностью исключить численное интегрирование, являющееся вычислительно-затратной операцией и необходимое для определения сечений рассеяния и акустических сил в описанных выше методах. Такой подход уже был реализован [12] и зарекомендовал себя в оптике, поскольку позволяет быстро и точно рассчитывать электрические и магнитные поля рассеяния на ансамблях из большого числа частиц (порядка 10^4), расположенных в многослойной структуре. Метод подробно описан в [13], основы подобного метода в акустике были собраны и изложены в [14], тем не менее, несмотря на наличие работ, использующих этот метод, насколько известно, на данный момент не существует готовой программной реализации в открытом доступе, позволяющей быстро и эффективно вычислять поля рассеяния и силы в ансамблях частиц в акустике. Поэтому для возможности быстрого моделирования задач многократного рассеяния этот метод был реализован и описан в данной работе.

Метод Т-матриц, основанный на мультипольном разложении полей, позволяет детально анализировать силы, действующие на частицы в их ансамблях. Силы в акустике могут быть вызваны разными типами взаимодействия. По природе возникновения они могут быть условно разделены на силы, появляющиеся в потоках жидкостей или газов, вызванные деформацией частиц, а также силы рассеяния. В случае, когда размер частиц сравним с длиной волны в воздухе, как это было проанализировано, например, в [11], силы рассеяния преобладают над остальными. Кроме того, в системах, где

расстояние между частицами порядка нескольких длин волн, помимо вклада в силу от внешнего поля, существенный вклад дают поля перерассеяния. Взаимодействие частиц, обусловленное интерференцией этих полей, может привести к эффекту самоорганизации рассеивателей в устойчивые конфигурации. В оптике подобное взаимодействие называется оптическим связыванием. Этот эффект дает способ для манипулирования частицами и может использоваться в некоторых реализациях акустического пинцета. Анализом сил взаимодействия, а также возникающими моментами сил с использованием метода Т-матриц уже занимались в системе из нескольких частиц [15]. Также, в приближении достаточно удаленных частиц, было исследовано взаимодействие большого числа рассеивателей [16]. Эволюция ансамбля из нескольких частиц на близком расстоянии друг от друга была проанализирована в [11] с использованием метода фундаментальных решений. В предыдущих работах рассматривались системы, в которых спектр рассеяния частиц имел нерезонансную природу, однако при наличии резонансов может проявляться необычное для описанных выше систем поведение рассеивателей. В данной работе были исследованы особенности такого поведения в системе из нескольких резонансных частиц, находящихся в поле плоской стоячей волны на расстояниях порядка нескольких длин волн.

1 Реализация метода Т-матриц

1.1 Основы метода

Рассмотрим задачу рассеяния поля падающего давления p^{inc} на N сферических частицах с плотностями ρ_n и скоростями распространения продольных волн c_n , $n = 1 \dots N$, находящихся в жидкой или газообразной среде с плотностью ρ_0 , скоростью звука c и сжимаемостью $\beta_0 = \frac{1}{\rho_0 c^2}$ (рисунок 1). Для

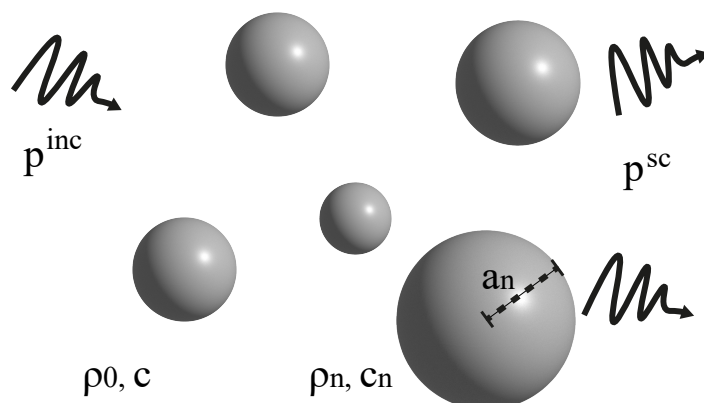


Рисунок 1 – Модель задачи рассеяния акустической волны на ансамбле сферических частиц

нахождения установившегося поля давления p в каждой из областей необходимо найти решение уравнений непрерывности и Навье-Стокса первого порядка для давления и скорости \mathbf{v}

$$\begin{cases} \rho_0 \partial_t \mathbf{v} = -\nabla p \\ \beta_0 \partial_t p = -\nabla \cdot \mathbf{v} \end{cases} \quad (1)$$

Это решение должно удовлетворять условиям непрерывности давления и нормальной к границе компоненты скорости на поверхности каждой из частиц. В случае монохроматических полей (с зависимостью от времени $e^{-i\omega t}$) из системы (1) получается уравнение Гельмгольца

$$\frac{\omega^2}{c^2} p + \nabla^2 p = 0.$$

Решение уравнение Гельмгольца в сферической системе координат (r, θ, ϕ) представимо в виде мультипольного ряда с базисными функциями $\psi_l^m(\mathbf{r})$, соответствующими рассеянному полю, и $\hat{\psi}_l^m(\mathbf{r})$, соответствующими падающе-

му полю (приложение А)

$$\psi_l^m(\mathbf{r}) = h_l^{(1)}(kr)Y_l^m(\theta, \phi), \quad \hat{\psi}_l^m(\mathbf{r}) = j_l(kr)Y_l^m(\theta, \phi).$$

Поскольку рассеивателей несколько, решение уравнения Гельмгольца в среде, окружающей рассеиватели, для самосогласованного поля давления будет представлять собой сумму падающего поля давления и суперпозицию полей рассеяния от каждой из частиц [14]

$$p = p^{inc} + p^{sc} = p_0 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \left(d_l^m \hat{\psi}_l^m(\mathbf{r}) + \sum_n^N c_{l,n}^m \psi_l^m(\mathbf{r}_n) \right). \quad (2)$$

И, аналогично, может быть выражено поле внутри n -й частицы

$$p_n^{in} = p_0 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} g_{l,n}^m \hat{\psi}_l^m(\mathbf{r}_n), \quad (3)$$

где p_0 - амплитуда давления, \mathbf{r}_n - радиус вектор в системе координат n -й частицы (r_n, θ_n, ϕ_n) . Коэффициенты d_l^m заданы падающим полем давления, а коэффициенты рассеяния $c_{l,n}^m$ и коэффициенты $g_{l,n}^m$ необходимо найти, удовлетворив граничным условиям на поверхности каждой из частиц ∂B_n

$$\begin{cases} (p^{inc} + p^{sc})|_{\partial B_n} = p^{in}|_{\partial B_n} \\ (v_{\perp}^{inc} + v_{\perp}^{sc})|_{\partial B_n} = v_{\perp}^{in}|_{\partial B_n} \end{cases}, \quad (4)$$

где $n = 1 \dots N$. Удовлетворение граничным условиям на поверхности частицы удобно производить в ее системе координат, поскольку для сферических частиц эта поверхность задается уравнением $r_n = a_n$, где a_n - радиус n -й частицы. Для этого необходимо знать, как внешнее поле давления, а также поля рассеяния от остальных частиц выражаются через базисные функции в системе координат рассматриваемой частицы. Для этого нужно воспользоваться теоремой сложения для сферических функций в трехмерном пространстве [14]

$$\psi_l^m(\mathbf{r}_i) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} S_{l\nu}^{m\mu}(\delta_{ji}) \hat{\psi}_{\nu}^{\mu}(\mathbf{r}_j), \quad r_j < |\mathbf{r}_{0,j} - \mathbf{r}_{0,i}| \quad (5)$$

$$\hat{\psi}_l^m(\mathbf{r}_i) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \hat{S}_{l\nu}^{m\mu}(\boldsymbol{\delta}_{ji}) \hat{\psi}_\nu^\mu(\mathbf{r}_j), \quad (6)$$

где $\mathbf{r}_{0,i}$ - положение i -й частицы, $|\boldsymbol{\delta}_{ji}|$ - расстояние между центрами частиц (рисунок 2), $S_{l\nu}^{m\mu}$ и $\hat{S}_{l\nu}^{m\mu}$ - коэффициенты переноса, обсуждение которых будет сделано в разделе 1.3. Применяя теорему (5) к рассеянному полю в (2) полное

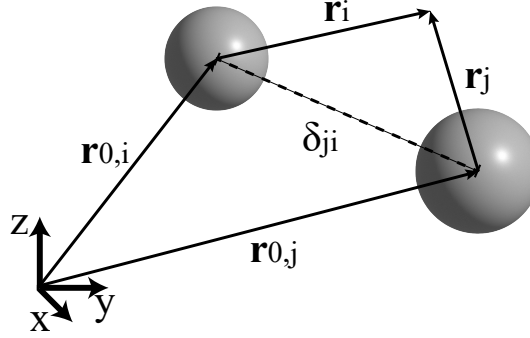


Рисунок 2 – Переход между системами координат, используемый в теореме сложения

поле давления может быть записано в системе координат n -й сферы

$$p(\mathbf{r}_n) = p_0 \sum_{l,m} \left(\tilde{d}_{l,n}^m \hat{\psi}_l^m(\mathbf{r}_n) + c_{l,n}^m \psi_l^m(\mathbf{r}_n) \right).$$

Первое слагаемое представляет собой эффективное падающее поле на n -ую частицу с коэффициентами

$$\tilde{d}_{l,n}^m = d_{l,n}^m + \sum_{s \neq n} \sum_{\nu,\mu} S_{\nu l}^{\mu m}(\boldsymbol{\delta}_{ns}) c_{\nu s}^\mu$$

определяемыми внешним падающим полем, перерасложенным относительно n -й системы координат с использованием теоремы сложения (6)

$$d_{l,n}^m = \sum_{\nu,\mu} d_\nu^\mu \hat{S}_{\nu l}^{\mu m}(\boldsymbol{\delta}_n)$$

и полями рассеяния от всех остальных частиц.

Используя введенные обозначения, а также учитывая ортогональность сферических гармоник (приложение А), система (4) для каждого l, m запи-

сывается в виде

$$\begin{cases} \tilde{d}_{l,n}^m j_l(ka_n) + c_{l,n}^m h_l(ka_n) = g_{l,n}^m j_l(k_n a_n) \\ \tilde{d}_{l,n}^m j_l'(ka_n) + c_{l,n}^m h_l'(ka_n) = g_{l,n}^m j_l'(k_n a_n) \gamma_j \end{cases}, \quad (7)$$

где $\gamma_j = \rho_0 k_n / \rho_n k$, $k = \omega/c$, $k_n = \omega/c_n$, $n = 1 \dots N$. Из данной системы, принимая известными $\tilde{d}_{l,n}^m$, можно получить связь коэффициентов падающего на частицу поля и рассеянного

$$c_{l,n}^m = t_{n,l} \tilde{d}_{l,n}^m, \quad (8)$$

где $t_{n,l}$ - элементы, из которых можно составить матрицу, называемую Т-матрицей n -й частицы. Они определяются лишь частотой падающего поля, параметрами окружающей среды и параметрами n -й частицы и не зависят от других рассеивателей. Выражение для элемента Т-матрицы в случае сжимаемой сферической частицы

$$t_{n,l} = \frac{\gamma_j j_n(ka_j) j_n'(k_j a_j) - j_n(k_j a_j) j_n'(ka_j)}{-\gamma_j h_n(ka_j) j_n'(k_j a_j) + j_n(k_j a_j) h_n'(ka_j)}. \quad (9)$$

Отметим, что если бы $\tilde{d}_{l,n}^m = d_{l,n}^m$, то (8) являлось бы решением задачи рассеяния на уединенной частице. Поскольку это не так, то (8) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными коэффициентами рассеяния

$$c_{l,n}^m = t_{n,l} \left[d_{l,n}^m + \sum_{s \neq n} \sum_{\nu, \mu} S_{\nu l}^{\mu m}(\delta_{ns}) c_{\nu s}^\mu \right]. \quad (10)$$

Таким образом, зная связь коэффициентов рассеяния с коэффициентами падающего поля при рассеянии на одной частице систему (7) удалось свести к в два раза меньшей (10).

Эта система является бесконечной, поскольку в выражениях (2), (3) ряд является бесконечным. Для численного решения полученной системы (10) необходимо зафиксировать порядок мультипольного разложения L : теперь суммирование по l в 2, 3 будет до L .

Если обозначить наборы коэффициентов $c_{l,n}^m$, $d_{l,n}^m$ за вектора \mathbf{c} и \mathbf{d} , а наборы базисных функций за ψ , $\hat{\psi}$ то поле давления (2) может быть записано в следующем виде

$$p = p_0(\hat{\psi} \cdot \mathbf{d} + \psi \cdot \mathbf{c}).$$

Тогда уравнение (10) можно записать в матричном виде

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{Td}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{1} - \mathbf{TS}. \quad (11)$$

Здесь \mathbf{T} - блочно-диагональная матрица, составленная из T -матриц каждой частицы. Матрица \mathbf{S} - блочная матрица, каждый из блоков которой определяется взаимным расположением двух частиц и состоит из коэффициентов переноса $S_{\nu l}^{\mu m}(\delta_{ns})$.

Таким образом задача рассеяния может быть сведена к решению системы линейных алгебраических уравнений с матрицей размером

$$N \cdot (L + 1)^2 \times N \cdot (L + 1)^2.$$

Решив эту систему, может быть найдено итоговое поле давления сразу во всех точках пространства.

1.2 Вычисление интегральных величин

В терминах коэффициентов мультипольного разложения могут быть выражены сечения рассеяния и экстинкции, а также акустические силы. Для определения этих величин используются выражения (28), (29), а также удобно воспользоваться теоремой (31) из приложения А, позволяющей преобразовывать интегралы от величин, представимых в виде мультипольных рядов к сумме попарных произведений коэффициентов этих разложений.

Поток энергии рассеяния может быть определен как [17]

$$W_{sc} = \int_{\partial B_R} \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p^{sc*} v_r^{sc}) dS,$$

где интегрирование производится по поверхности сферы B_R , окружающей ансамбль частиц, а подынтегральное выражение является радиальной компонентой акустического аналога вектора Пойнтинга. Здесь и далее * означает

комплексное сопряжение. Поверхность интегрирования может быть смещена на поверхности самих частиц, тогда

$$W^{sc} = \sum_n^N W_n^{sc} = \frac{1}{2\omega\rho_0} \sum_n^N \text{Im} \int_{\partial B_n} p^{sc*} \partial_r p^{sc} dS.$$

Нормируя на интенсивность падающей волны I_0 , можно получить выражение для сечения рассеяния через уже найденные в разделе 1.1 коэффициенты мультипольного разложения [17]

$$\sigma_{sc} = \frac{W_{sc}}{I_0} = \frac{\alpha}{I_0} \sum_n^N \sum_{l,m} |c_{l,j}^m|^2 + \frac{\alpha}{I_0} \sum_n^N \sum_{l,m} \sum_{s \neq n}^N \sum_{\nu,\mu} c_{l,n}^{m*} c_{\nu,s}^\mu \hat{S}_{\nu l}^{\mu m}(\mathbf{b}_{ns}). \quad (12)$$

Аналогично, выражение для сечения экстинкции может быть записано как

$$\sigma_{ex} = -\frac{1}{I_0} \int_{\partial B_R} \frac{1}{2} \text{Re}(p^{sc*} v_r^{inc} + p^{inc*} v_r^{sc}) dS = -\frac{\alpha}{I_0} \sum_n^N \text{Re} \sum_{l,m} c_{l,n}^m d_{l,n}^{m*}. \quad (13)$$

Здесь $\alpha = \frac{|p_0|^2}{2\omega\rho_0 k}$.

Акустическая сила, действующая на n -ю частицу в общем виде может быть представлена в виде интеграла по поверхности, окружающей n -ую сферу [18]

$$\mathbf{F}_n = - \int_{\partial B_n} \hat{\mathbf{\Pi}} \cdot \mathbf{n} dS,$$

где $\hat{\mathbf{\Pi}}$ - тензор плотности потока импульса звукового поля.

$$\hat{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{4} (\beta_0 |p|^2 - \rho_0 |v|^2) \hat{\mathbf{I}} + \frac{1}{2} \text{Re}(\rho_0 \mathbf{v} \mathbf{v}^*).$$

Тогда, используя перечисленные выше тождества, декартовы компоненты силы, действующей на n -ю частицу, могут быть записаны в виде [18], [15]

$$F_{x,n} + iF_{y,n} = \frac{iE_0}{2k^2} \sum_{m,l} f_l^m \left[\tau_{l,n} \tilde{d}_{l,n}^m \tilde{d}_{l+1,n}^{m+1*} + \tau_{l,n}^* \tilde{d}_{l,n}^{-m*} \tilde{d}_{l+1,n}^{-m-1} \right] \quad (14)$$

$$F_{z,n} = \frac{E_0}{k^2} \text{Im} \left\{ \sum_{m,l} g_l^m \tau_{l,n} \tilde{d}_{l,n}^m \tilde{d}_{l+1,n}^{m*} \right\}, \quad (15)$$

где введены следующие обозначения

$$f_l^m = \sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+3)}}, \quad g_l^m = \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}},$$

$$E_0 = \frac{1}{2}\beta_0 p_0^2, \quad \tau_{l,n} = t_{l,n} + t_{l+1,n}^* + 2t_{n,l}t_{l+1,n}^*.$$

Таким образом, используя выражения (12), (13), (14) могут быть найдены силы и сечение рассеяния без использования методов численного интегрирования.

1.3 Вычисление коэффициентов переноса

Для составления матрицы системы (11) необходимо вычислить коэффициенты переноса $S_{l\nu}^{m\mu}$ и $\hat{S}_{l\nu}^{m\mu}$, используемые в теореме сложения (5) при составлении матрицы \mathbf{S} и выражающиеся через базисные функции $\hat{\psi}$, ψ и коэффициент Гаунта

$$S_{l\nu}^{m\mu}(\boldsymbol{\delta}) = 4\pi(-1)^{\mu+\nu+Q} \sum_{q=0}^Q (-1)^q \psi_{q_0+2q}^{m-\mu}(\boldsymbol{\delta}) G(l, m; \nu, -\mu; q_0 + 2Q)$$

$$\hat{S}_{l\nu}^{m\mu}(\boldsymbol{\delta}) = 4\pi(-1)^{\mu+\nu+Q} \sum_{q=0}^Q (-1)^q \hat{\psi}_{q_0+2q}^{m-\mu}(\boldsymbol{\delta}) G(l, m; \nu, -\mu; q_0 + 2Q).$$

Значения Q , q_0 определяются для каждого l, n, ν, μ

$$Q = (l + \nu - q_0)/2$$

$$q_0(l, m; \nu, \mu) = \begin{cases} |l - m| & \text{если } |l - \nu| \geq |m + \mu| \\ |m + \mu| & \text{если } |l - \nu| < |m + \mu| \text{ и} \\ & l + \nu + |m + \mu| \text{ четное} \\ |m + \mu| + 1 & \text{если } |l - \nu| < |m + \mu| \text{ и} \\ & l + \nu + |m + \mu| \text{ не четное} \end{cases}.$$

Коэффициенты Гаунта G выражаются через $3j$ -символы Вигнера

$$G(l, m; \nu, \mu; q) = (-1)^{m+\mu} \kappa \begin{pmatrix} l & \nu & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & \nu & q \\ m & \mu & -m - \mu \end{pmatrix},$$

где $\kappa = \sqrt{(2l+1)(2\nu+1)(2q+1)/(4\pi)}$. Поскольку при составлении системы приходится производить большое количество вычислений этих коэффициентов, то важно отметить, что быстрое вычисление $3j$ -символов Вигнера с высокой точностью является важной и нетривиальной задачей. Существуют различные методы вычисления этих символов. Точное вычисление с использованием арифметики чисел с плавающей запятой является сложным из-за потери точности при многократном суммировании больших чисел чередующихся знаков. Использование же целочисленной арифметики является проблематичным из-за необходимости вычисления факториалов больших чисел. В связи с этим был использован метод, реализованный в [19], где использовалось следующее их представление

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} &= (-1)^{a-b-\gamma} \sqrt{\Delta(a, b, c)} \times \\ \sum_t & \frac{(-1)^t \sqrt{(a+\alpha)!(a-\alpha)!(b+\beta)!(b-\beta)!(c+\gamma)!(c-\gamma)!}}{t!(c-b+t+\alpha)!(c-a+t-\beta)!(a+b-c-t)!(a-t-\alpha)!(b-t+\beta)!} \\ \Delta(a, b, c) &= (a+b+c)!(a-b+c)!(-a+b+c)!/(a+b+c+1)! \end{aligned}$$

В данном выражении суммирование производится по всем t , для которых аргументы факториалов являются неотрицательными.

Алгоритм, используемый для эффективного вычисления заключается в следующем: заранее составлялась таблица факториалов, факторизованных на простые множители; далее, в представлении чисел в виде массивов из степеней разложения на простые числа, производится поиск наибольшего общего множителя числителя и знаменателя, вычисление дробей, извлечение корней и другие операции. Благодаря этому алгоритму удалось обеспечить точность, близкую к машинной, а также наилучшую по сравнению с другими алгоритмами скорость [19].

1.4 Анализ сходимости

При непосредственной реализации разложение по базисным сферическим функциям не является бесконечным рядом, а ограничивается некоторым порядком мультипольного разложения L . В таком приближении становится возможным составить конечную систему на коэффициенты разложения и решить ее, однако это влечет за собой неточность решения, поэтому при ис-

пользовании метода Т-матриц необходимо учитывать некоторые особенности используемого подхода.

Рассмотрим разложение падающей плоской акустической волны давления по базисным функциям $\hat{\psi}(\mathbf{r})$ [14]

$$p^{inc} = p_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \sum_{l,m} d_l^m j_l(kr) Y_l^m(\theta, \phi), \quad d_l^m = 4\pi i^l Y_l^{m*}(\theta_k, \phi_k), \quad (16)$$

где θ_k, ϕ_k обозначают направление волнового вектора \mathbf{k} . Коэффициенты разложения d_l^m не являются убывающими, поэтому важна сходимость ряда в зависимости от аргумента базисных функций kr . В качестве примера, на рисунке 3 приведена относительная погрешность при разложении (16) поля давления в плоскости xz . В данном случае, плоская волна, распространяющаяся вдоль оси y раскладывалась в мультипольный ряд до трех различных порядков L и в каждой точке плоскости сравнивалось полученное поле давления с точным значением.

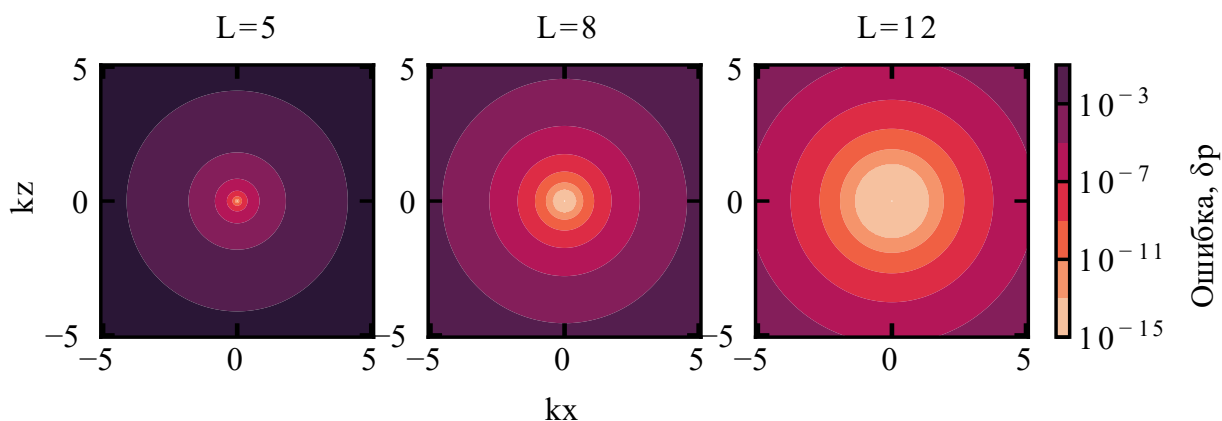


Рисунок 3 – Относительная ошибка при разложении плоской волны давления в мультипольный ряд в зависимости от расстояния до центра разложения для различных мультипольных порядков L

При решении задачи рассеяния роль параметра kr принимает параметр размера частицы ka (a - радиус частицы), поскольку при удовлетворении граничных условий (7), что в методе Т-матриц соответствует вычислению Т-матрицы частицы, рассчитываются значения базисных функций на поверхности частицы. Чтобы оценить влияние параметра ka на точность решения задачи рассеяния методом Т-матриц, было вычислено значение сечения экстинкции в зависимости от порядка мультипольного разложения L , в случае

рассеяния плоской акустической волны на одной частице с разными параметрами размера ka . По построенному графику ошибки сечения рассеяния (рисунок 4) видно, что при увеличении размера частицы, для одного и того же порядка разложения ошибка возрастает. Также, для частиц, размеры которых сильно меньше длины волны (малый параметр ka), скорость сходимости гораздо больше, чем для рассеивателей, размеры которых сравнимы с ней. Это связано с тем, что чем меньше частица, тем больше ее рассеяние похоже на рассеяние точечного источника (монополя). Также интересно отметить, что для частиц, размеры которых отличаются в два раза, для достижения одинаковой точности необходимо использовать в два раза больший порядок разложения.

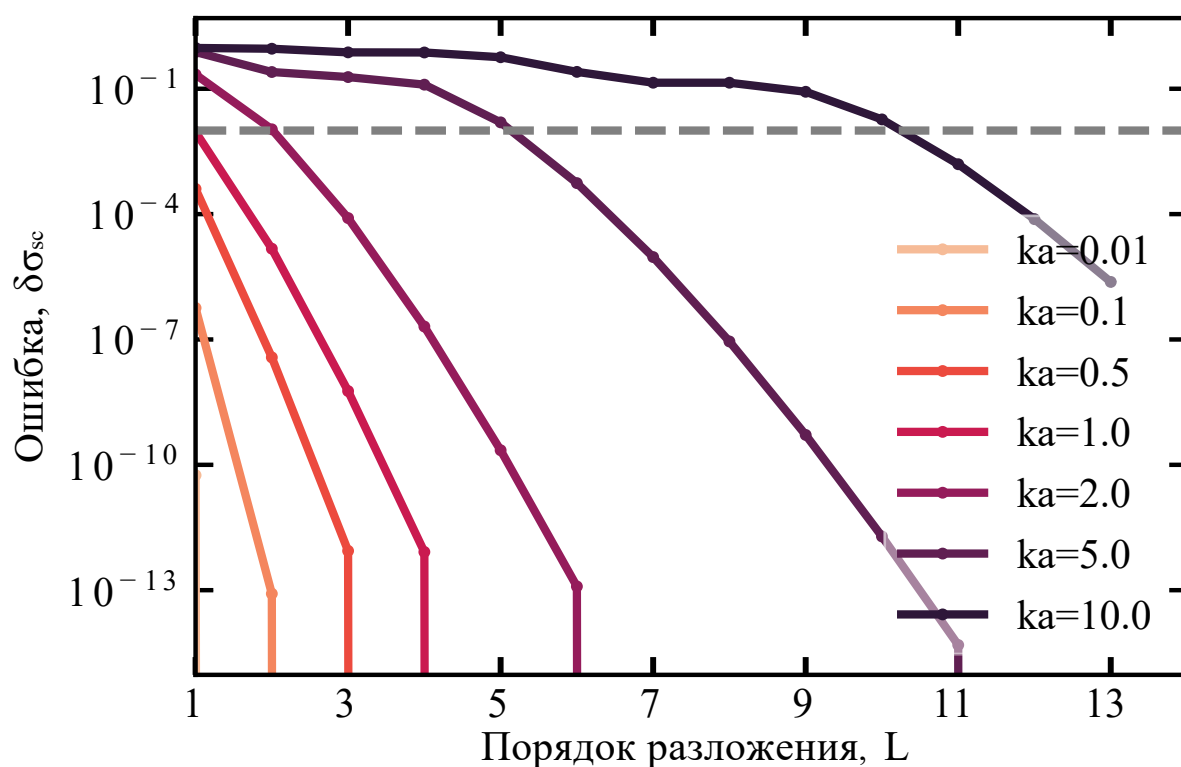


Рисунок 4 – Скорость сходимости при вычислении сечения рассеяния при решении задачи рассеяния на одной частице для разных размеров частицы в зависимости от мультипольного порядка разложения

Помимо этого, для нахождения точного решения, необходимо учитывать расстояние между соседними частицами. В качестве модели для демонстрации этого была рассмотрена система из двух одинаковых частиц с параметрами размера $ka \approx 1$, расположенных на оси x на обезразмеренном расстоянии $k\delta$ друг от друга в поле плоской акустической волны, с волновым

вектором, направленным в плоскости (x, z) под углом сорок пять градусов (рисунок 5 б).

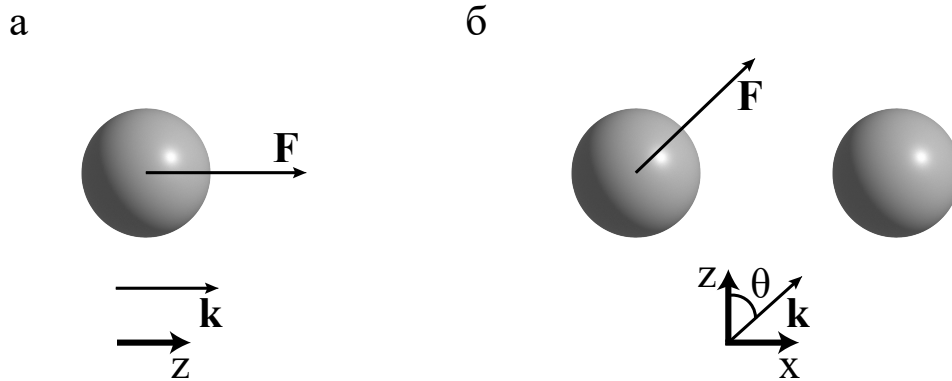


Рисунок 5 – Модели систем, используемых для верификации и анализа сходимости

На рисунке 6 построены зависимости ошибок при вычислении сечения рассеяния, а также x компоненты акустической силы, действующей на верхнюю частицу, от порядка мультипольного разложения L для различных $k\delta$.

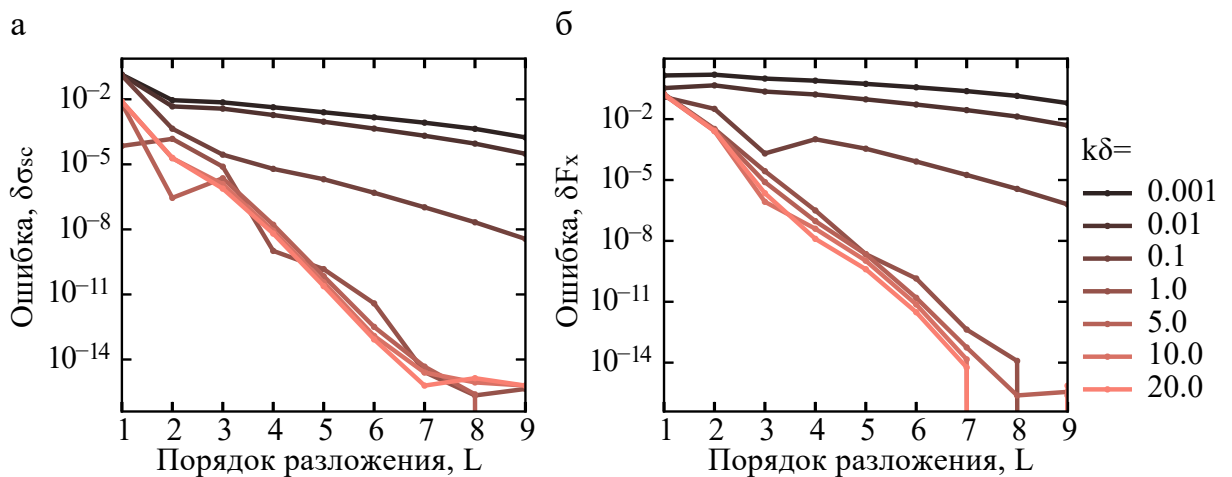


Рисунок 6 – Сходимость а) сечения рассеяния б) x -компоненты силы при решении задачи рассеяния на двух частицах для разных расстояний между ними в зависимости от мультипольного порядка разложения

Можно наблюдать, что чем меньше расстояние между частицами, тем больше необходимый порядок разложения для достижения заданной точности. Когда расстояние между частицами составляет несколько длин волн, определенная точность решения достигается при меньших L . С физической

точки зрения, при близко-расположенных частицах значительный вклад создают эффекты, связанные с многократным перерассеянием акустических полей, что соответствует тому, что рассматривать ансамбль частиц, как набор уединенных рассеивателей нельзя. С математической точки зрения, роль перерассеяния учитывается при использовании теоремы сложения для сферических функций, поскольку она позволяет учитывать вклад в эффективное падающее поле на частицу от рассеянных полей остального ансамбля. Как видно из выражений (5), (6) каждая из базисных функций ψ_l^m преобразуется в ряд из базисных функций $\hat{\psi}_\nu^\mu$ всех порядков ν, μ ($\nu = 0 \dots L, \mu = -\nu \dots \nu$) и при небольшом расстоянии между частицами вклады от мультиполей высших порядков при переразложении возрастают.

1.5 Время работы

На время выполнения программы влияние оказывают два фактора: количество частиц N и порядок мультипольного разложения L . Для оценки влияния каждого из них на временную сложность работы программы были построены графики зависимости времени выполнения программы от порядка разложения L для различного числа частиц (рисунок 7), а также от количества рассеивателей N для нескольких порядков мультипольного разложения (рисунок 8). При этом суммарное время работы программы разделялось на составление общей матрицы системы и ее решения, и времени вычисления интегральных величин (акустические силы, сечение экстинкции).

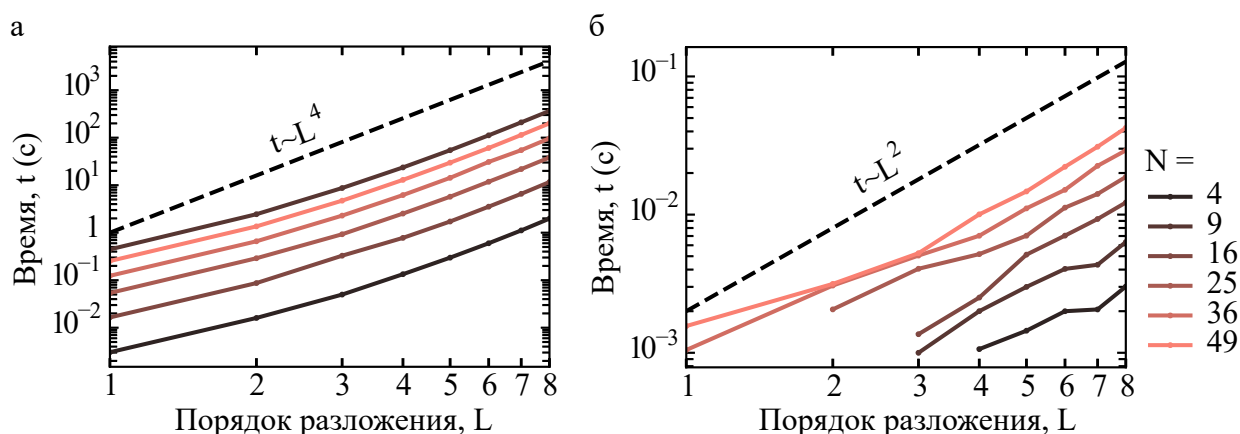


Рисунок 7 – Время а) составления системы и ее решения, б) вычисления сил, действующих на каждую из частиц в зависимости от порядка мультипольного разложения для разного числа частиц

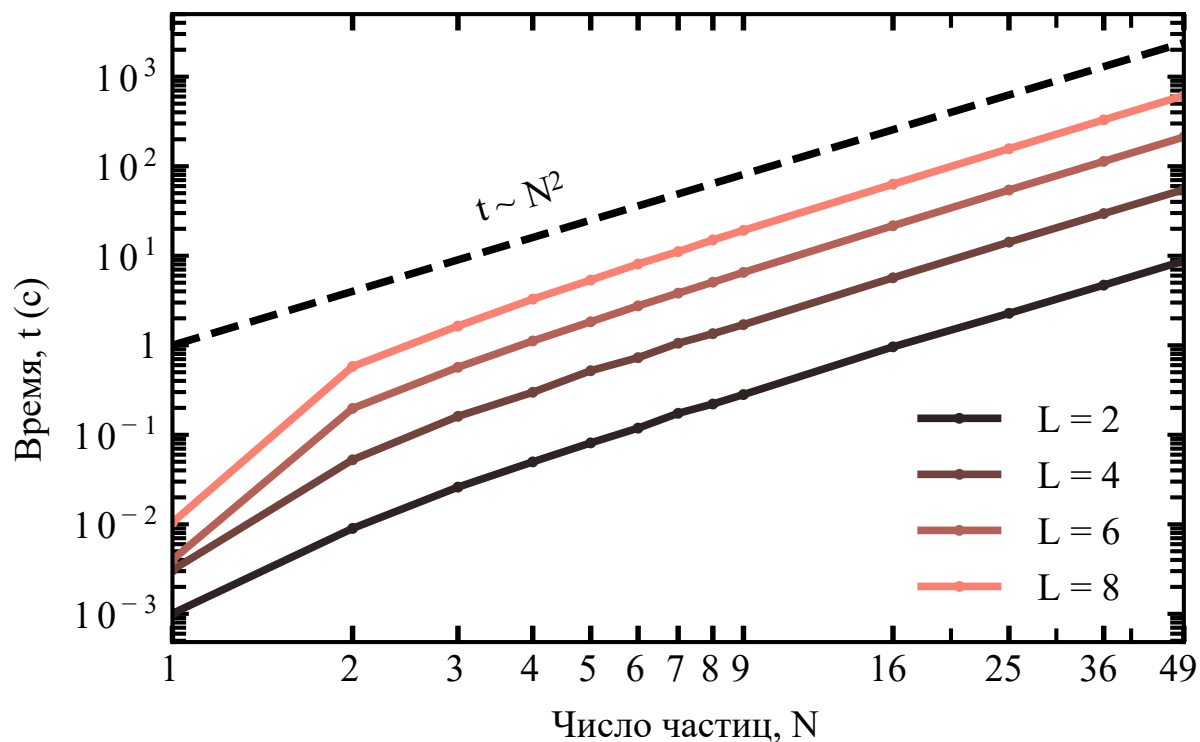


Рисунок 8 – Время составления системы и ее решения в зависимости от количества частиц для разных порядков мультипольного разложения

В качестве модели для такой задачи была рассмотрена система из $N = n^2, n = 1 \dots 8$ одинаковых частиц размеров порядка длины волны, расположенных в узлах прямоугольной сетки так, что расстояние между двумя соседними рассеивателями было порядка длины волны. Графики были построены в логарифмической шкале. По углу наклона графиков видно, что зависимость времени составления (и решения) системы квадратичная по отношению к количеству частиц (рисунок 8) и является функцией 4 степени по отношению к порядку разложения (рисунок 7). Такие зависимости определяются тем, что основная часть времени работы программы уходит на составление матрицы системы, размер которой - $N \cdot (L + 1)^2 \times N \cdot (L + 1)^2$. Это соответствует результатам временного профилирования программы, представленного в таблице 1.

Построенные данные относятся к моделированию, выполненному с использованием ЦП AMD Ryzen 5 5600H 3.3GHz.

1.6 Верификация

Для верификации корректности работы программы было произведено сравнение результатов, полученных с помощью реализованной программы,

Таблица 1 – Соотношение времен работы различных этапов программного цикла для различных порядков мультипольного разложения L и числа частиц N

–	Составление системы	Решение системы	Расчет сил
$N = 4, L = 4$	95.56 %	3.63 %	0.81 %
$N = 4, L = 8$	99.00 %	0.85 %	0.15 %
$N = 36, L = 4$	99.28 %	0.67 %	0.05 %
$N = 36, L = 8$	99.31 %	0.68 %	0.01 %

основанной на методе **T**-матриц, с результатами, полученными при моделировании рассеяния с использованием программного обеспечения для численного решения задач рассеяния, основанного на методе конечных элементов (МКЭ), а также с аналитическим решением задачи рассеяния на одной частице.

В качестве системы с одной частицей была рассмотрена задача рассеяния плоской акустической волны, распространяющейся вдоль оси z на частице из аэрогеля в воздухе (рисунок 5 а). Используемые параметры частиц, окружающей среды и падающего поля представлены в таблице 2 под номером 1. В рассмотренном примере задача является осесимметричной и выра-

Таблица 2 – Таблица параметров

–	№ 1	№ 2
Плотность частиц	67.375 кг/м ³	997 кг/м ³
Скорость звука в частицах	97.54 м/с	1403 м/с
Радиусы частиц	1 м	1 м
Плотность среды	1.225 кг/м ³	1.225 кг/м ³
Скорость звука в среде	331 м/с	331 м/с
Амплитуда давления	1 Па	1 Па

жения для силы F , действующей вдоль оси z , и, например, сечения рассеяния принимают более простой вид

$$\sigma_{sc} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) |t_l|^2. \quad (17)$$

$$F = F_z = -\frac{2\pi}{k^2} p_0^2 \beta_0 \sum_{l=0}^{\infty} \{(2l + 1) \operatorname{Re}(t_l) + 2(l + 1) \operatorname{Re}(t_l^* t_{l+1})\}. \quad (18)$$

Для такой системы с помощью метода Т-матриц был построен спектр сечения рассеяния и акустической силы, которые, как видно на рисунке 9 точно согласуются со спектрами полученными по формулам (17), (18).

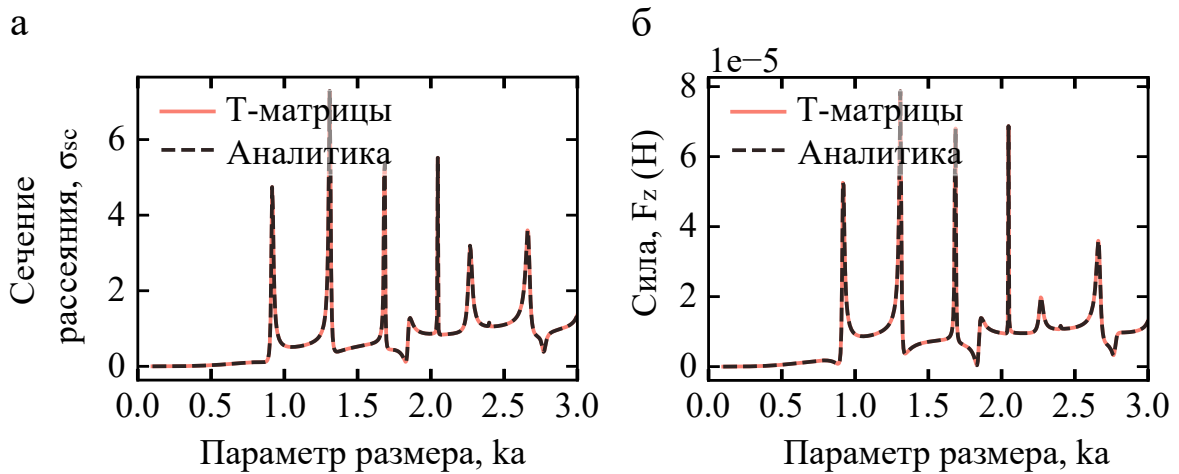


Рисунок 9 – Сопоставление а) сечений рассеяния б) z -компоненты силы, действующей на частицу из аэрогеля в воздухе, полученных с помощью метода Т-матриц и используя аналитическое решение

Также была рассмотрена система из двух водяных частиц в воздухе в поле плоской акустической волны, распространяющейся с волновым вектором, направленным под углом $\theta = 45$ градусов в плоскости (x, z) (рисунок 5 б). Используемые параметры частиц, окружающей среды и падающего поля представлены в таблице 2 под номером 2. Для такой модели были построены спектры сечения рассеяния и компонент F_x и F_z акустической силы, действующей на левую частицу с помощью метода Т-матриц. Для сравнения, с использованием программного обеспечения для решения физических задач COMSOL Multiphysics, реализующего численный метод конечных элементов, на нескольких частотах были вычислены значения сечения рассеяния и компонент акустических сил. Как видно на рисунке 10, результаты также хорошо согласуются.

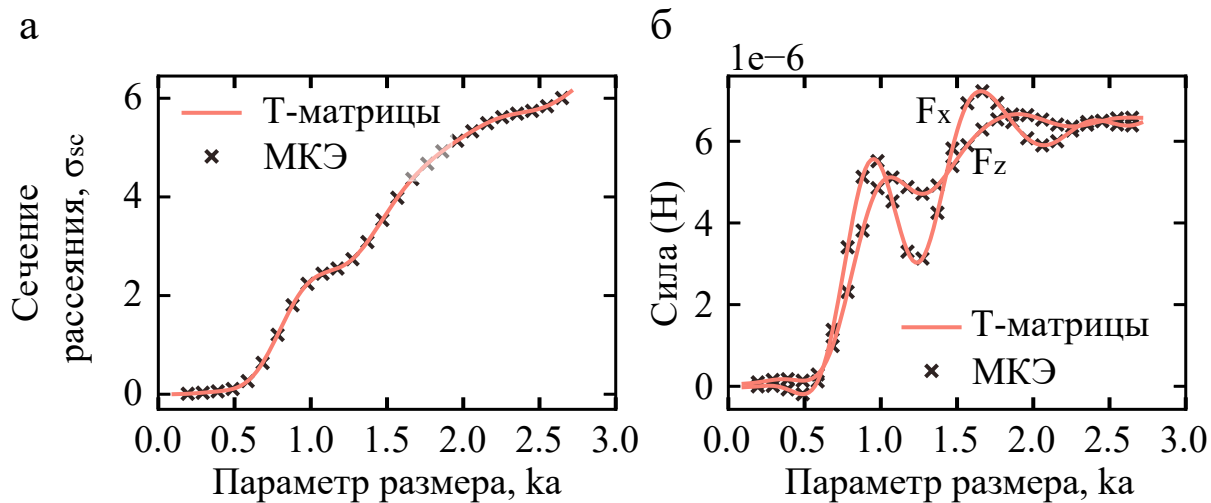


Рисунок 10 – Сопоставление а) сечений рассеяния б) ненулевых компонент сил, действующих на одну из частиц воды в воздухе, полученных с помощью метода Т-матриц и используя метод конечных элементов в COMSOL Multiphysics

2 Акустическое связывание

Благодаря реализованному методу Т-матриц становится возможным исследовать эффекты акустического связывания, возникающие при рассеянием акустических волн на ансамблях сферических частиц. При помещении частицы в звуковое поле на нее начинают действовать силы, вызванные рассеянием на ней акустической волны, однако в случае нескольких объектов, наблюдается более сложное итоговое распределение полей. Благодаря эффектам многократного перерассеяния, усиливающимся при уменьшении расстояния между рассеивателями, возникают дополнительные силы, влияющие на поведение частиц, вызванные интерференцией внешнего и рассеянных полей. Частицы, находясь в полях перерассеяния друг друга стремятся занять положение, в которых сила, действующая на них, минимальна. Благодаря такому поведению образуются устойчивые конфигурации ансамблей (рисунок 11). Интерес вызывают особенности такой самоорганизации, которые могут возникать при резонансном рассеянии.

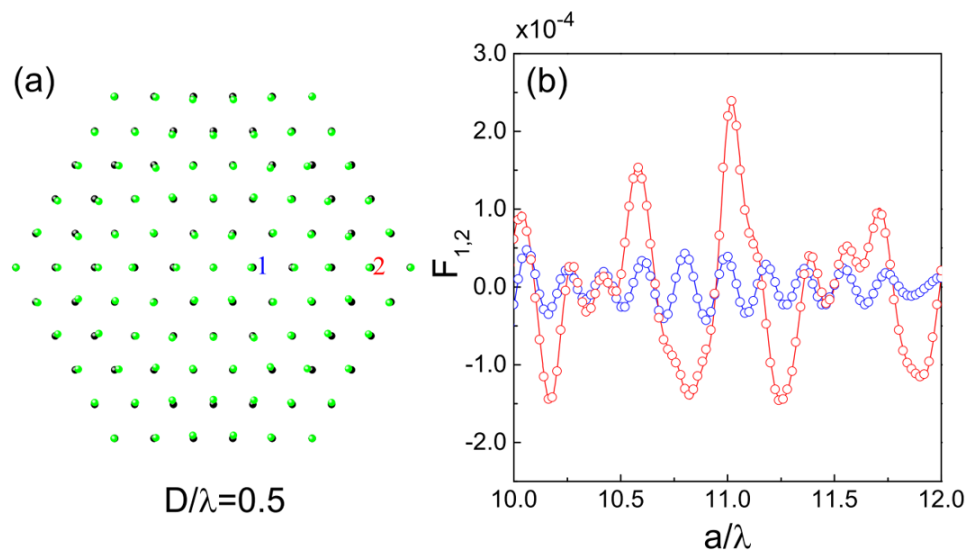


Рисунок 11 – а) Начальная и устойчивая конфигурации ансамбля частиц в плоской стоячей волне б) силы, действующие на рассмотренные частицы в зависимости от расстояния между частицами. Графики взяты из [16]

2.1 Исследование

Для исследования поведения резонансных частиц будет рассматриваться система из нескольких сферических частиц из аэрогеля в воздухе. Аэрогели представляют собой преимущественно мезопористые твердые вещества с открытыми порами с большой внутренней пористостью и, следовательно, низкой плотностью [20]. Используемые параметры частиц, окружающей сре-

ды и падающего поля представлены в таблице 2 под номером 2. Благодаря низким плотности и скорости распространения звуковых волн в аэрогеле, становится возможным наличие резонансных эффектов при рассеянии (влияние поглощения не учитывается). Для подтверждения этого, с использованием описанного выше метода Т-матриц, был построен график (рисунок 12) зависимости сечения рассеяния от эффективного размера частицы, при рассеянии на ней плоской акустической волны давления с волновым вектором \mathbf{k} , направленным в плоскости (x, z) вдоль оси z (рисунок 5 а).

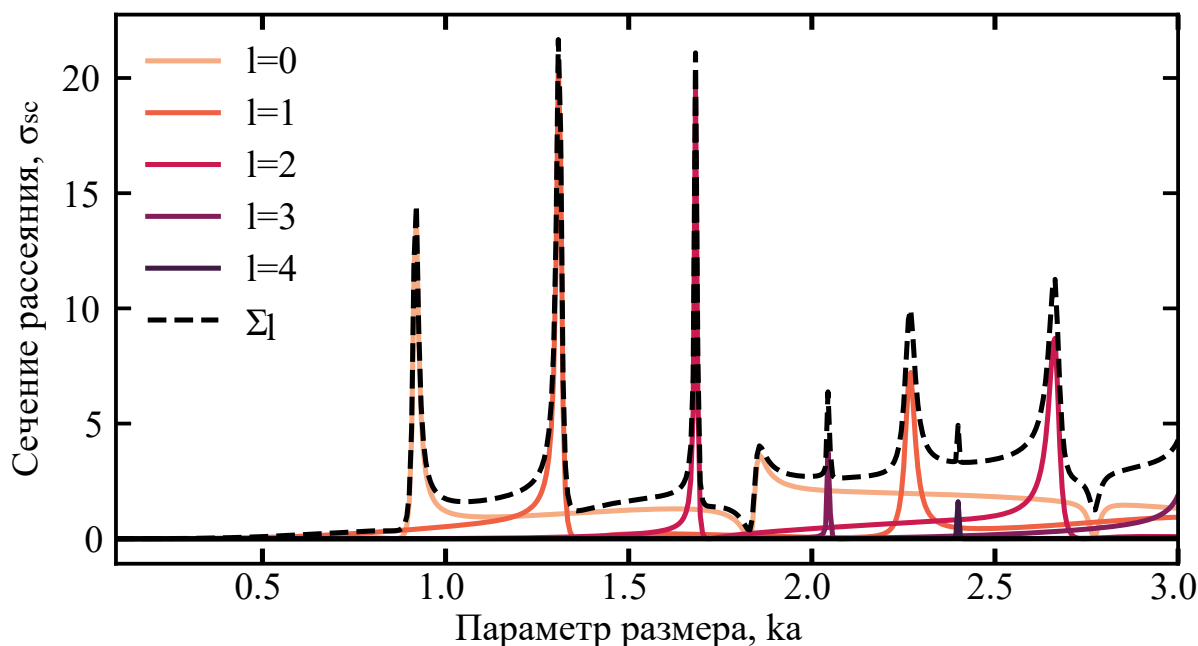


Рисунок 12 – Спектр сечения рассеяния плоской волны на одной частице из аэрогеля для различных мультипольных порядков

Положения по горизонтальной оси наблюдаемых резонансов совпадают с положениями резонансов соответствующих мультипольных порядков l элементов Т-матрицы частицы 9, определяющих рассеяние. При дальнейшем рассмотрении, в качестве резонанса, вблизи которого будет исследоваться поведение рассеивателей, был выбран монопольный резонанс ($l = 0$).

Далее, была рассмотрена система из двух частиц из аэрогеля с радиусами a в поле двух плоских акустических волн, распространяющихся на встречу друг другу вдоль оси x (волновые вектора в плоскости (x, z)) и образующих стоячую волну (рисунок 13 а). Частицы были расположены в пучности стоячей волны ($x = 0, y = 0, z = \pm\delta/2$).

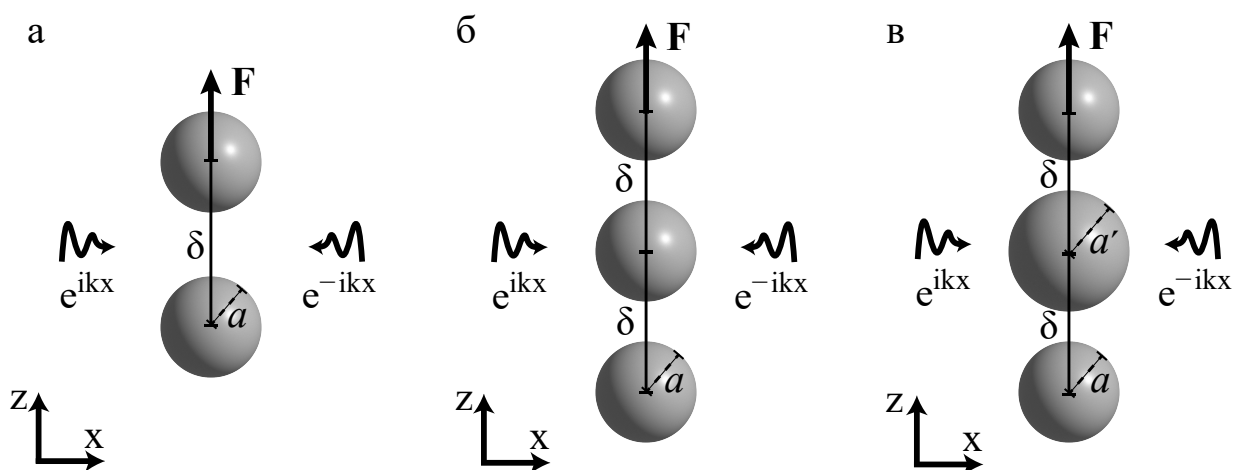


Рисунок 13 – Рассматриваемые модели при исследовании акустического связывания

Благодаря такой конфигурации, z -компоненты возникающих сил, действующих на каждую из частиц, будут противоположных знаков, а x - и y -компоненты тождественно равны 0. Возникающие z -компоненты силы будут определяться возникающими полями рассеяния от каждой из частиц и определяться расстоянием δ между ними. Для различных длин волн, обеспечивающих параметр ka была построена зависимость z -компоненты силы, действующей на верхнюю частицу, а также сечение рассеяния, в зависимости от расстояния $k\delta$ между ними (рисунок 14).

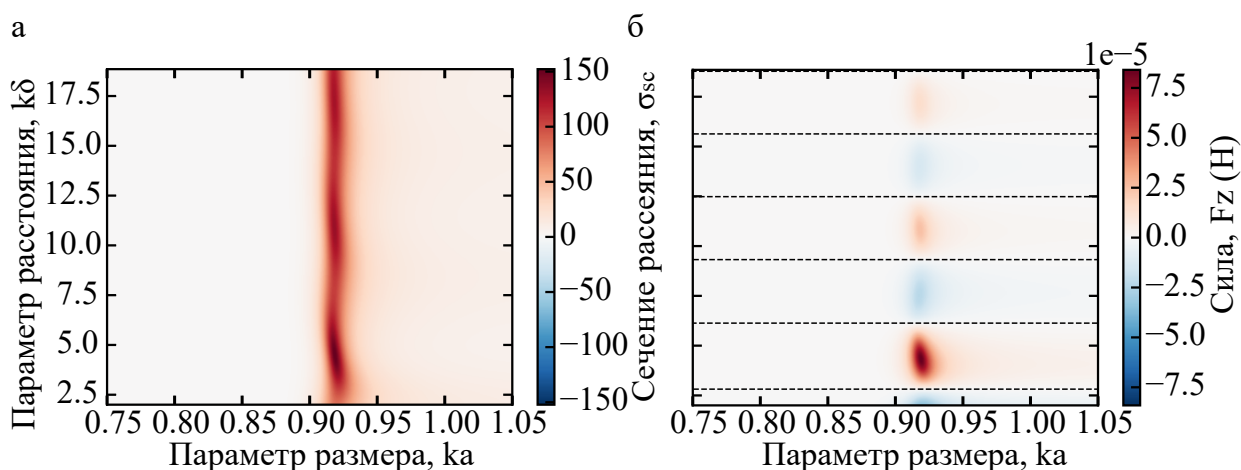


Рисунок 14 – а) Сечение рассеяния б) z -компонента силы, действующая на верхнюю частицу в случае рассеяния стоячей волны на двух сферических частицах из аэрогеля

Поскольку графики были построены для частот вблизи монопольного резонанса, то при приближении к нему по горизонтальной оси наблюдается рост сечения рассеяния а также амплитуды силы. По левому графику

можно наблюдать положение (по горизонтальной оси) монополюсного резонанса, причем оно не является постоянным, что подчеркивает зависимость резонансной частоты не только от параметров частиц в окружающей среде, но и их взаимного расположения. Также по этому графику видно чередование знаков силы в зависимости от расстояния между частицами, а также ее обращение в ноль на некоторых расстояниях. Такие положения соответствуют положениям равновесия, причем их устойчивость определяет устойчивость конфигурации двух частиц с соответствующим расстоянием между ними. Положения где сила обращается в ноль и при небольшом увеличении $k\delta$ становится отрицательной являются устойчивыми, поскольку сила препятствует изменению расстояния между частицами. В случае, когда сила меняется с отрицательной на положительную при увеличении $k\delta$, положение является неустойчивым.

Аналогичные графики могут быть получены для подобной системы из трех частиц аэрогеля одинакового размера a в поле стоячей волны. Центральная частица расположена в нуле глобальной системы координат, а две соседние находятся в координатах $\pm\delta$ по оси z (рисунок 13 б). Благодаря такому расположению, силы, действующей на центральную частицу, не будет, а для крайних частиц, они будут противоположны по направлению и направлены по оси z . Из графика на рисунке 15 б видно, что z -компонента сила так же осциллирует при изменении расстояния между частицами, что сопровождается чередованием положений равновесия. Однако можно заметить, что линии

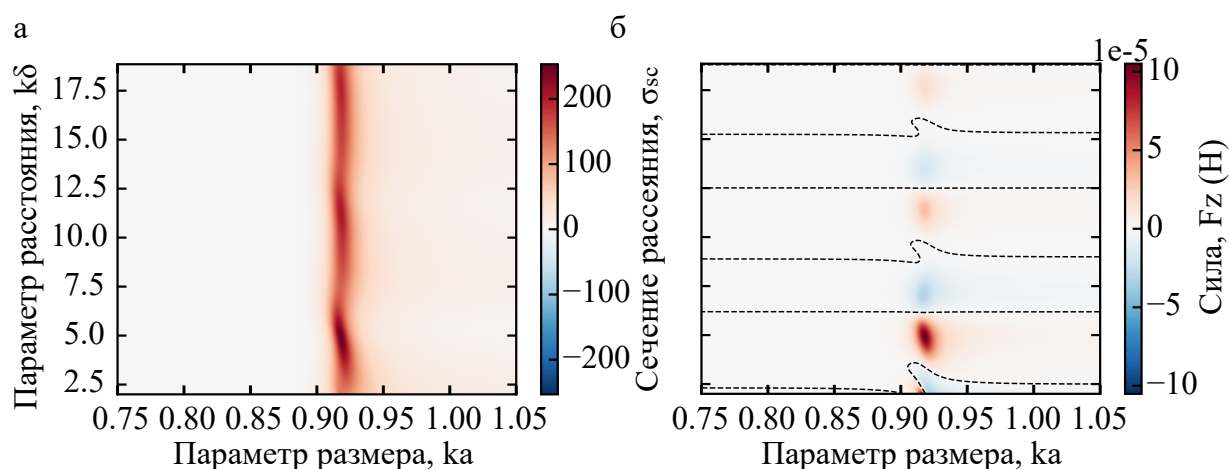


Рисунок 15 – а) Сечение рассеяния б) z -компонента силы, действующая на верхнюю частицу в случае рассеяния стоячей волны на трех одинаковых сферических частицах из аэрогеля

нулей искажаются: вблизи резонанса наблюдается их характерный изгиб, на этом промежутке вблизи неустойчивого положения равновесия появляется еще одно устойчивое и одно неустойчивое равновесие.

Еще более интересная ситуация происходит если в последней системе изменить размер центральной частицы (обозначим его $a' = 1.03a$, рисунок 13 в). Благодаря изменению размера одной частицы, можно наблюдать расщепление резонансов на рисунке 16 а. Поскольку монополярный резонанс для частицы соответствует определенному значению ka , то для частицы с a' он будет на другой частоте, поэтому в спектре сечения рассеяния появляется дополнительный резонанс. Сила, действующая на центральную частицу, по-прежнему останется нулевой, а поведение силы, действующей на верхнюю частицу, значительно изменится (рисунок 16 б). У линии нулей для z -компоненты силы между положениями резонанса наблюдается изгиб. Однако появляется еще вертикальная линия нулей силы и ветвления левее нее.

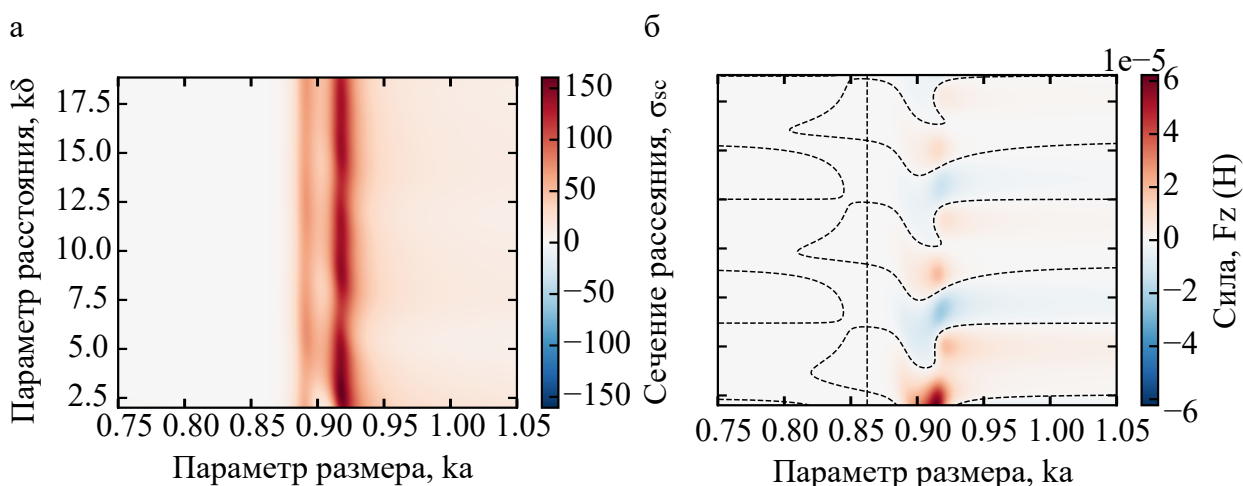


Рисунок 16 – а) Сечение рассеяния б) z -компонента силы, действующая на верхнюю частицу в случае рассеяния стоячей волны на трех сферических частицах разных размеров из аэрогеля

2.2 Монополярное взаимодействие

На данный момент были описаны результаты моделирования акустического рассеяния плоской стоячей волны на нескольких резонансных частицах с помощью метода Т-матриц по определению положений устойчивого равновесия, а также отмечено некоторое соответствие особенностей положений равновесия с положениями монополярных резонансов в спектре сечения рассеяния. Однако для более строгого анализа и объяснения подобного поведе-

ния необходимо воспользоваться формализмом монополярных поляризуемостей и функций Грина.

Поскольку рассматриваемые эффекты наблюдались вблизи монополярного резонанса, то каждый из рассеивателей можно рассматривать как монополярный источник рассеянных полей. Поле давления, возбуждаемое монополем [21]

$$p_M(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_0 c k^2}{4\pi} M \frac{e^{ikr}}{ikr} = -\frac{\rho_0 c k^2}{4\pi} M h_0(kr), \quad (19)$$

где M характеризует амплитуду рассеянных полей, создаваемых источником. Монополярная компонента рассеянного поля, представленного монополярным рядом

$$p^{sc}(\mathbf{r}) = p_0 c_0^0 h_0(kr) Y_0^0(\mathbf{r}), \quad c_0^0 = t_0 d_0^0, \quad (20)$$

где d_0^0, t_0 монополярные коэффициент разложения падающего поля и элемент матрицы рассеяния (9), c_0^0 - монополярный коэффициент рассеянного поля. Сравнивая (19) с (20), можно получить, что

$$M = -\frac{2p_0 \sqrt{\pi}}{\rho_0 c k^2} c_0^0. \quad (21)$$

Из выражений (19), (20), (21) следует, что амплитуда рассеяния монополя M определяется только монополярным коэффициентом разложения падающего поля d_0^0 и соответствующим элементом матрицы рассеяния. Поскольку $j_n(0) = 0 \forall n \neq 0$, то падающее поле давления в нуле определяется только монополярным коэффициентом. Это означает что M можно определить через внешнее поле давление в точке источника, а также величину, характеризующую рассеивающие свойства частицы. Таким образом, вводя монополярную поляризуемость α_M [22]

$$M = -i\omega\beta_0\alpha_M p^{inc}(\mathbf{r}_0), \quad \alpha_M = -i\frac{4\pi}{k^3} t_0.$$

Обычно [21], для описания монополярного излучения вводят функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, являющуюся по определению решением уравнения Гельмгольца для

точечного источника

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \implies$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{ik}{4\pi}h_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|).$$

Окончательно, для поля монополярного рассеивателя можно записать

$$p^{sc}(\mathbf{r}) = i\rho_0\omega G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)M = k^2G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\alpha_M p(\mathbf{r}_0), \quad (22)$$

где $p(\mathbf{r}_0) = p^{inc}(\mathbf{r}_0)$. Используя введенные термины, может быть получено [22] выражение для акустической силы, действующую на монополь M

$$\mathbf{F}_i = -\frac{1}{2\omega} \text{Im}(M^*\nabla p^{inc}). \quad (23)$$

В случае двух рассеивателей во внешнем поле p^{inc} , поскольку каждый из них является монополярным излучателем, установившееся поле давление можно представить в виде

$$p = p^{inc} + p^{sc,1} + p^{sc,2}, \quad p^{sc,i}(\mathbf{r}) = i\rho_0\omega G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{0,i})M_i,$$

где $M_i, i = 1,2$ является эффективной амплитудой монополярного рассеяния каждой из частиц, в которой учитываются вклады от перерассеяния между ними (рисунок 17). Для их определения необходимо решить систему

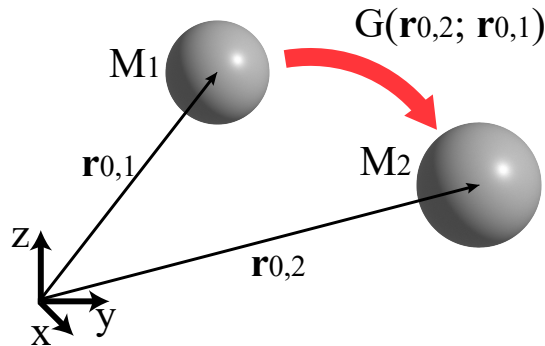


Рисунок 17 – Взаимодействие двух монополей

$$\begin{cases} M_1 = -i\omega\beta_0\alpha_M^1[p^{inc}(\mathbf{r}_{0,1}) + i\rho_0\omega G(\mathbf{r}_{0,1}, \mathbf{r}_{0,2})M_2] \\ M_2 = -i\omega\beta_0\alpha_M^2[p^{inc}(\mathbf{r}_{0,2}) + i\rho_0\omega G(\mathbf{r}_{0,2}, \mathbf{r}_{0,1})M_1] \end{cases}, \quad (24)$$

где $\alpha_M^i, i = 1,2$ соответствует монополюльной поляризуемости i -й частицы, а каждая из строчек системы означает, что соответствующая частица находится в эффективном падающем на нее поле, создаваемым внешним полем давления и рассеянным от другой частицы. Эти выражения можно получить записывая вклады в амплитуды M_i от каждого из бесконечного числа актов перерассеяния. Решая систему, получаем

$$M_i = -i\omega\beta_0\tilde{\alpha}_M^i \left[p^{inc}(\mathbf{r}_i) + k^2 G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \alpha_M^j p^{inc}(\mathbf{r}_j) \right],$$

где $i, j = (1,2), (2,1)$, $\tilde{\alpha}_M^i$ - введенная по аналогии с (21) эффективная монополюльная поляризуемость

$$\tilde{\alpha}_M^i = \frac{\alpha_M^i}{1 - k^4 G(\mathbf{r}_{0,i}, \mathbf{r}_{0,j}) \alpha_M^j G(\mathbf{r}_{0,j}, \mathbf{r}_{0,i}) \alpha_M^i}. \quad (25)$$

Поправка в знаменателе соответствует влиянию взаимодействия монополюлей на их поляризуемости (рисунок 17). Зная эффективную поляризуемость, используя (23) можно найти силу, действующую на каждый из монополюлей, отличие будет заключаться в том, что теперь градиент будет взят не только от падающего поля, но и от рассеянного другой частицей, что сведется к взятию градиента по первому аргументу функции Грина (22)

$$\mathbf{F} = \frac{\beta_0}{2} \left[\text{Re}(\tilde{\alpha}_M^1) \text{Re}(\tilde{\alpha}_M^2 Y) + \text{Im}(\tilde{\alpha}_M^1) \text{Im}(\tilde{\alpha}_M^2 Y) \right], \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} Y = & p^{inc*}(\mathbf{r}_{0,1}) \nabla p^{inc}(\mathbf{r}_{0,1}) + \alpha_2 k^2 G^*(\mathbf{r}_{0,1}, \mathbf{r}_{0,2}) p^{inc*}(\mathbf{r}_{0,2}) \nabla p^{inc}(\mathbf{r}_{0,1}) \\ & + k^2 \nabla G(\mathbf{r}_{0,1}, \mathbf{r}_{0,2}) p^{inc*}(\mathbf{r}_{0,1}) p^{inc*}(\mathbf{r}_{0,2}) \\ & + \alpha_M^{2*} k^4 G^*(\mathbf{r}_{0,2}, \mathbf{r}_{0,1}) \nabla G(\mathbf{r}_{0,1}, \mathbf{r}_{0,2}) |p^{inc}(\mathbf{r}_{0,2})|^2 \\ & + \alpha_M^1 k^4 G(\mathbf{r}_{0,2}, \mathbf{r}_{0,1}) \nabla G(\mathbf{r}_{0,1}, \mathbf{r}_{0,2}) |p^{inc}(\mathbf{r}_{0,1})|^2 \\ & + \alpha_M^{2*} \alpha_M^1 k^6 |G(\mathbf{r}_{0,2}, \mathbf{r}_{0,1})|^2 \nabla G(\mathbf{r}_{0,1}, \mathbf{r}_{0,2}) p^{inc*}(\mathbf{r}_{0,2}) p^{inc*}(\mathbf{r}_{0,1}). \end{aligned}$$

Аналогичная система получается для рассеяния на трех монополях

$$\begin{cases} M_1 = -i\omega\beta_0\alpha_M^1[p^{inc}(\mathbf{r}_{0,1}) + i\rho_0\omega G(\mathbf{r}_{0,1}, \mathbf{r}_{0,2})M_2 + i\rho_0\omega G(\mathbf{r}_{0,1}, \mathbf{r}_{0,3})M_3] \\ M_2 = -i\omega\beta_0\alpha_M^2[p^{inc}(\mathbf{r}_{0,2}) + i\rho_0\omega G(\mathbf{r}_{0,2}, \mathbf{r}_{0,1})M_1 + i\rho_0\omega G(\mathbf{r}_{0,2}, \mathbf{r}_{0,3})M_3] \\ M_3 = -i\omega\beta_0\alpha_M^3[p^{inc}(\mathbf{r}_{0,3}) + i\rho_0\omega G(\mathbf{r}_{0,3}, \mathbf{r}_{0,1})M_1 + i\rho_0\omega G(\mathbf{r}_{0,3}, \mathbf{r}_{0,2})M_2] \end{cases} .$$

Решая ее, можно также найти эффективные поляризуемости, поля рассеяния и силы, действующие на каждую из частиц. Результаты являются более громоздкими, но приведены в приложении Б.

2.3 Анализ

Благодаря полученным аналитическим выражениям становится возможным лучший анализ результатов, полученных в разделе 2. Аналогично графику сечения рассеяния, изображенном на рисунке 14 а, в случае рассеяния стоячей плоской волны на двух монополярных частицах, был построен график (рисунок 18 а) вещественной части эффективной поляризуемости (25) для верхней частицы, а также вычислена z -компоненты силы, действующая на эту частицу. Значения силы, вычисленные с помощью формул в предыдущем разделе совпадают с значениями, полученными с помощью метода Т-матриц в разделе 2, что иллюстрирует график абсолютной ошибки на рисунке 18 б.

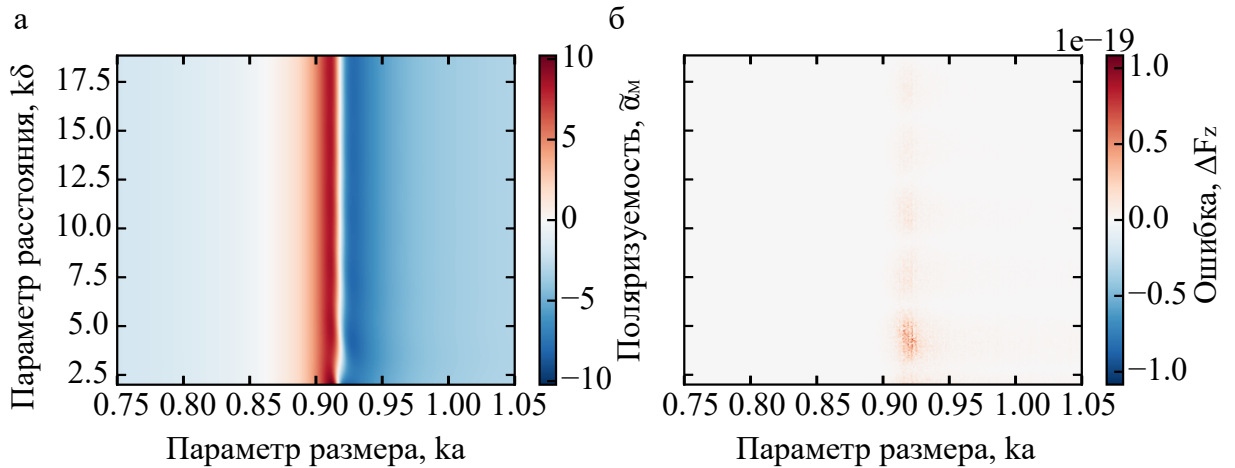


Рисунок 18 – а) Поляризуемость б) модуль абсолютной ошибки при сравнении z -компоненты силы, действующей на верхнюю частицу, вычисленной с помощью метода Т-матриц и используя функции Грина, в случае рассеяния стоячей волны на двух сферических частицах из аэрогеля

Аналогичное соответствие наблюдается и в случае рассмотренных выше систем из трех частиц (рисунок 21 в приложении Б), где также приведены графики для эффективных поляризуемостей в случае трех частиц.

Из формулы (26) видно, что взаимодействие частиц во многом определяется эффективными поляризуемостями частиц. Изменение знака поляризуемости влечет за собой изменение фазы поля рассеяния от рассматриваемой частицы, в котором находятся другие частицы. В свою очередь, изменение знака поляризуемости последних приводит к изменению их эффективных моментов.

Анализируя график на рисунке 18 а, можно видеть, что вещественная часть поляризуемости верхней частицы при некоторых значениях ka изменяет знак, однако характер взаимодействия не изменяется, что объясняется тем, что из выражения (25) следует, что знак поляризуемости нижней частицы также изменяется. Благодаря синхронному изменению знака поляризуемости взаимодействие частиц не изменяется.

В случае трех одинаковых частиц, поскольку сила, действующая на верхнюю частицу, определяется ее взаимодействием как с нижней частицей, так и с центральной, то отличие в их положениях даст особенность, которая наблюдается на графике z -компоненты силы на рисунке 15 б вблизи монополюсного резонанса, соответствует коллективному резонансу и описывается поправкой в знаменателе эффективной поляризуемости (34), аналогичной (25).

При изменении размера центральной частицы наблюдается сдвиг между нулями эффективных поляризуемостей частиц разных размеров. На рисунке 19 построены графики зависимости их вещественных и мнимых частей. Из графика на рисунке 20 видно, что нулям вещественных частей поляризуемостей соответствуют нули z -компоненты силы. Отметим, что поскольку в первом нуле как вещественная, так и мнимая части эффективных поляризуемостей $\tilde{\alpha}_M$ верхней и нижней частиц малы (рисунок 19), то основной вклад в силу, действующую на верхнюю частицу, вблизи этого нуля дает ее взаимодействие с центральной частицей. Таким образом, изменение знака в силе вблизи этого нуля поляризуемости для всех $k\delta$ обусловлено сменой знака вещественной части поляризуемости для верхней частицы и сохранением знака у центральной.

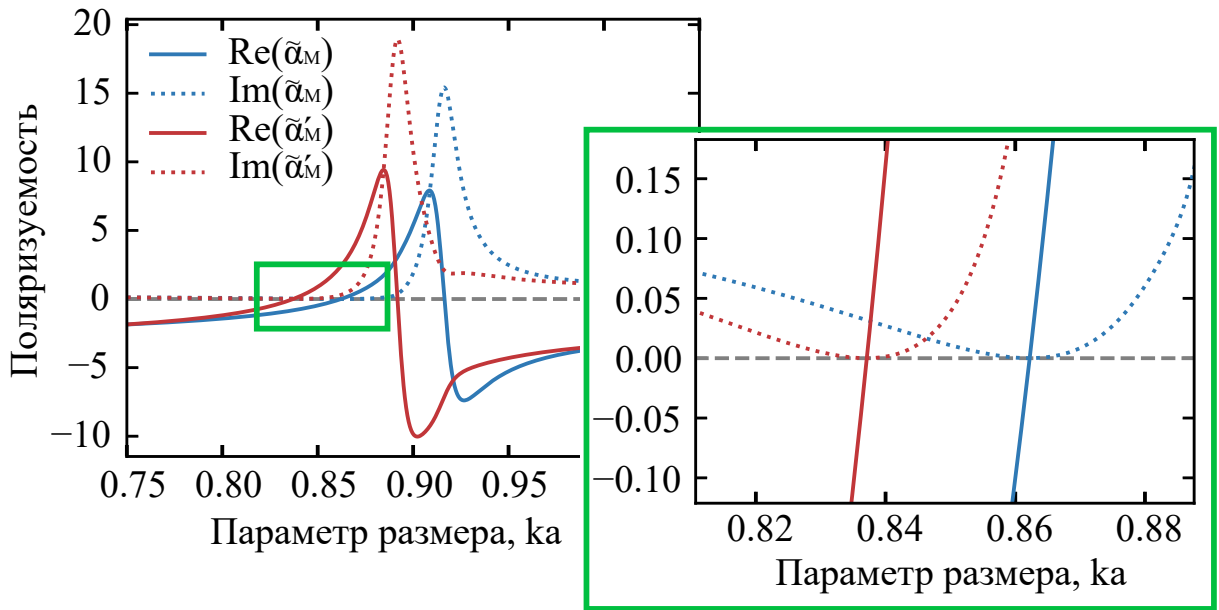


Рисунок 19 – Вещественные и мнимые части эффективных поляризуемостей $\tilde{\alpha}_M$, $\tilde{\alpha}'_M$ частиц с радиусами a , a' соответственно, полученные при расстоянии $k\delta = 14$ между частицами, в зависимости от параметра ka , характеризующем частоту падающего поля

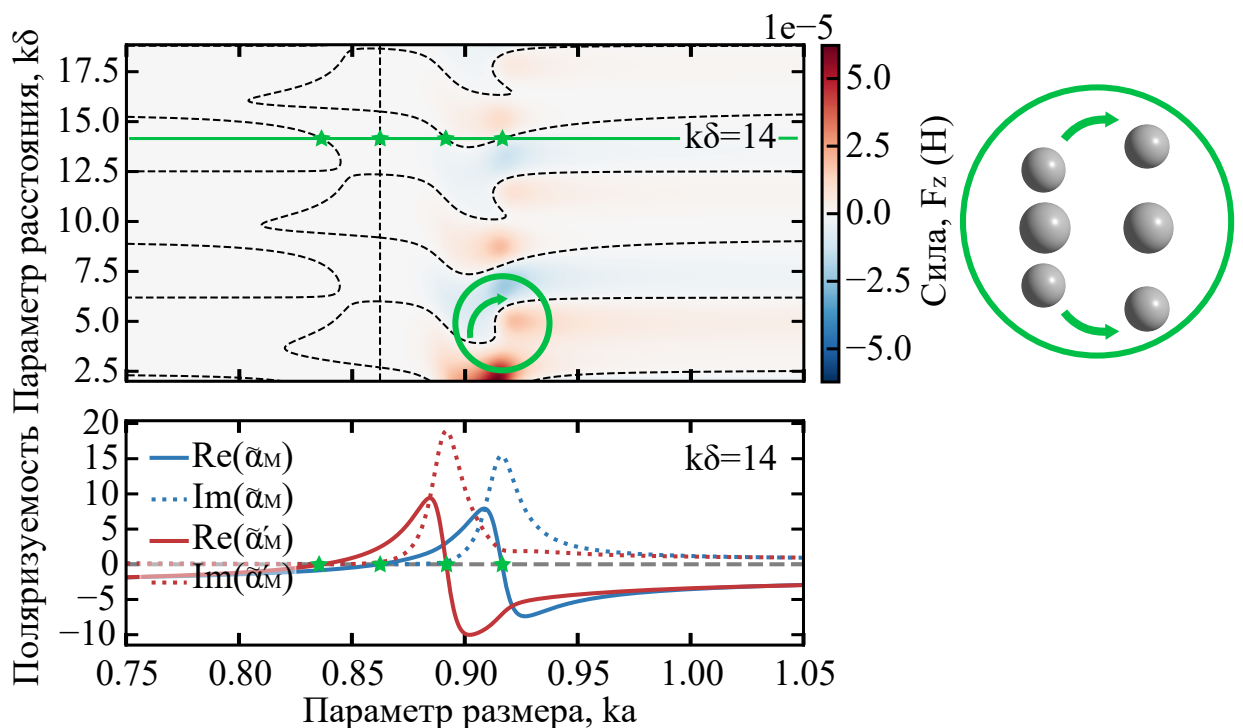


Рисунок 20 – Сопоставление особенностей в поведении z компоненты силы, действующей на верхнюю частицу с нулями поляризуемостей, в случае трех частиц из аэрогеля разных размеров

Такого эффекта не возникало в предыдущих случаях из-за одновременной смены знака при определенных ka у поляризуемостей и стало возможным для наблюдения при расщеплении резонансов. Помимо этого, благодаря сдвигу между положениями резонансов для разного размера частиц, наблюдается заметное искривление линий в области между этими резонансами, соответствующих положениям устойчивых равновесий частиц. Начало и конец характерных углублений на графиках этих линий совпадают со второй сменой знака поляризуемостей вблизи резонанса по ka . Физически, подобное поведение вблизи резонанса системы из трех различных частиц, интересно тем, что крайние частицы, находясь в положениях равновесия в поле стоячей волны на частоте близкой к резонансной, при небольшом изменении этой частоты, совершат скачкообразный переход в новое положение равновесия (рисунок 20). Этот эффект может быть использован для манипулирования частицами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был описан метод T-матриц, позволяющий быстро и точно рассчитывать акустические силы и рассеяние в ансамбле сферических частиц. На основе этого метода был реализован пакет для моделирования акустического рассеяния и вычисления сил на языке программирования Python [23] для моделирование рассеяния, а также вычисления акустических сил и сечений рассеяния. С использованием реализованного подхода было исследовано акустическое связывание нескольких резонансных частиц и описаны особенности в их поведении при рассеянии на них плоской стоячей волны на частоте монопольного резонанса. Эти особенности были проанализированы аналитически в приближении монопольного рассеяния.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Acoustic tweezers / L. Meng [и др.] // Journal of Physics D: Applied Physics. — 2019. — Т. 52, № 27. — С. 273001.
2. Dholakia K., Drinkwater B. W., Ritsch-Marte M. Comparing acoustic and optical forces for biomedical research // Nature Reviews Physics. — 2020. — Т. 2, № 9. — С. 480–491.
3. Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles / A. Ashkin [и др.] // Optics letters. — 1986. — Т. 11, № 5. — С. 288–290.
4. Acoustic tweezers for the life sciences / A. Ozcelik [и др.] // Nature methods. — 2018. — Т. 15, № 12. — С. 1021–1028.
5. Rayleigh J. W. S. B. The theory of sound. Т. 2. — Macmillan, 1896.
6. Faran Jr J. J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // The Journal of the acoustical society of America. — 1951. — Т. 23, № 4. — С. 405–418.
7. Yosioka K., Kawasima Y. Acoustic radiation pressure on a compressible sphere // Acta Acustica united with Acustica. — 1955. — Т. 5, № 3. — С. 167–173.
8. Gaunaurd G., Huang H., Strifors H. Acoustic scattering by a pair of spheres // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1995. — Т. 98, № 1. — С. 495–507.
9. Computation of the acoustic radiation force using the finite-difference time-domain method / F. Cai [и др.] // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2010. — Т. 128, № 4. — С. 1617–1622.
10. Efficient finite element modeling of radiation forces on elastic particles of arbitrary size and geometry / P. Glynne-Jones [и др.] // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2013. — Т. 133, № 4. — С. 1885–1893.
11. Dynamics of acoustically bound particles / N. S. Clair [и др.] // Physical Review Research. — 2023. — Т. 5, № 1. — С. 013051.
12. SMUTHI: A python package for the simulation of light scattering by multiple particles near or between planar interfaces / A. Egel [и др.] // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. — 2021. — Т. 273. — С. 107846.

13. Doicu A., Wriedt T., Eremin Y. A. Light scattering by systems of particles: null-field method with discrete sources: theory and programs. T. 124. — Springer, 2006.
14. Martin P. A. Multiple scattering: interaction of time-harmonic waves with N obstacles. — Cambridge University Press, 2006.
15. Lopes J. H., Azarpeyvand M., Silva G. T. Acoustic interaction forces and torques acting on suspended spheres in an ideal fluid // IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control. — 2015. — T. 63, № 1. — С. 186–197.
16. Acoustically mediated long-range interaction among multiple spherical particles exposed to a plane standing wave / S. Zhang [и др.] // New Journal of Physics. — 2016. — T. 18, № 11. — С. 113034.
17. Martin P. Multiple scattering and scattering cross sections // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2018. — T. 143, № 2. — С. 995–1002.
18. Silva G. T. An expression for the radiation force exerted by an acoustic beam with arbitrary wavefront (L) // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2011. — T. 130, № 6. — С. 3541–3544.
19. Johansson H. T., Forssén C. Fast and accurate evaluation of Wigner 3 j, 6 j, and 9 j symbols using prime factorization and multiword integer arithmetic // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2016. — T. 38, № 1. — A376–A384.
20. A review on silica aerogel-based materials for acoustic applications / Z. Mazrouei-Sebdani [и др.] // Journal of Non-Crystalline Solids. — 2021. — T. 562. — С. 120770.
21. Williams E. G., Mann III J. A. Fourier acoustics: sound radiation and nearfield acoustical holography. — 2000.
22. Acoustic radiation force and torque on small particles as measures of the canonical momentum and spin densities / I. Toftul [и др.] // Physical review letters. — 2019. — T. 123, № 18. — С. 183901.
23. AcSmuthi. — URL: <https://github.com/vsevolodkleshchenko/AcSmuthi>; Пакет для моделирования многократного акустического рассеяния, Клещенко В, 2023.

24. NIST Digital Library of Mathematical Functions. — URL: <https://dlmf.nist.gov/>; F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain, eds. <https://dlmf.nist.gov/>, Release 1.1.9 of 2023-03-15.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Сферические функции

При решении уравнения Гельмгольца в сферических координатах, поле давления может быть записано, с использованием разделения переменных, в виде

$$p(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi). \quad (27)$$

Решение приведено, например в [21]. Зависимость от углов определяется функциями $Y_l^m(\theta, \phi)$. В данной работе используются следующее выражение для сферических гармоник

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta),$$

где $P_l^m(\cos \theta)$ - присоединенные полиномы Лежандра

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x),$$

где P_l - полином Лежандра степени l . Радиальная зависимость в (27) определяется сферическими функциями Бесселя и Ханкеля первых и вторых типов j_n, y_n и h_n^1, h_n^2 . При решении задачи рассеяния для разложения падающего поля используется регулярные в нуле функции Бесселя $j_n(kr)$. Для описания рассеянного поля используются $h_n^1(kr)$, поскольку они удовлетворяют условиям излучения Зоммерфельда, определяющим уходящие на бесконечность волны [14]

$$r \left(\frac{\partial p}{\partial r} - ikp(r) \right) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Свойство ортонормированности сферических функций

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} Y_l^m(\theta, \phi) Y_{l'}^{m'*}(\theta, \phi) \sin \theta d\phi d\theta = \delta_{mm'} \delta_{ll'}. \quad (28)$$

Для сферических функций $f_n = j_n, y_n, h_n^1, h_n^2$ верны следующие рекуррентные соотношения [24]

$$f_{n-1}(z) + f_{n+1}(z) = \frac{2n+1}{z} f_n(z) \quad (29)$$

$$n f_{n-1}(z) - (n+1) f_{n+1}(z) = (2n+1) f'_n(z), \quad (30)$$

где $n = 1, 2, \dots$

Также, если есть два потенциала U, V , представимых в виде мультипольных рядов

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \{A_l^m \hat{\psi}(\mathbf{r}) + B_l^m \psi(\mathbf{r})\}, \quad V(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \{C_l^m \hat{\psi}(\mathbf{r}) + D_l^m \psi(\mathbf{r})\}$$

то интегралы ниже могут быть преобразованы к следующему виду [14]

$$\int_{\partial B} \{U \partial_r V - V \partial_r U\} dS = \frac{i}{k} \sum_{l,m} (-1)^m \{A_l^m D_l^{-m} - C_l^m B_l^{-m}\} \quad (31)$$

$$\int_{\partial B} \{U \partial_r V^* - V^* \partial_r U\} dS = -\frac{i}{k} \sum_{l,m} \{2B_l^m D_l^{m*} + A_l^m D_l^{m*} + B_l^m C_l^{m*}\}. \quad (32)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Акустическое связывание трех частиц

Аналогичная 24 система получается для рассеяния на трех монополях

$$\begin{cases} M_1 = -i\omega\beta_0\alpha_M^1[p^{inc}(\mathbf{r}_{0,1}) + i\rho_0\omega G(\mathbf{r}_{0,1}, \mathbf{r}_{0,2})M_2 + i\rho_0\omega G(\mathbf{r}_{0,1}, \mathbf{r}_{0,3})M_3] \\ M_2 = -i\omega\beta_0\alpha_M^2[p^{inc}(\mathbf{r}_{0,2}) + i\rho_0\omega G(\mathbf{r}_{0,2}, \mathbf{r}_{0,1})M_1 + i\rho_0\omega G(\mathbf{r}_{0,2}, \mathbf{r}_{0,3})M_3] \\ M_3 = -i\omega\beta_0\alpha_M^3[p^{inc}(\mathbf{r}_{0,3}) + i\rho_0\omega G(\mathbf{r}_{0,3}, \mathbf{r}_{0,1})M_1 + i\rho_0\omega G(\mathbf{r}_{0,3}, \mathbf{r}_{0,2})M_2] \end{cases} .$$

При ее решении получаются следующие монопольные моменты для всех перестановок без повторений $i, j, k = (1, 2, 3)$

$$M_i = -i\omega\beta_0\tilde{\alpha}_M^i[p^{inc}(r_{0,i}) + p_{ij} + p_{ik} + p_{ijk} + p_{ikj} - p_{jki}] \quad (33)$$

$$\tilde{\alpha}_M^i = \frac{\alpha_M^i}{1 - \alpha_{ij} - \alpha_{ik} - \alpha_{jk} - \alpha_{ijk} - \alpha_{ikj}}, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= k^4 G(\mathbf{r}_{0,i}, \mathbf{r}_{0,j})\alpha_M^j G(\mathbf{r}_{0,j}, \mathbf{r}_{0,i})\alpha_M^i, \\ \alpha_{ik} &= k^4 G(\mathbf{r}_{0,i}, \mathbf{r}_{0,k})\alpha_M^k G(\mathbf{r}_{0,k}, \mathbf{r}_{0,i})\alpha_M^i, \\ \alpha_{jk} &= k^4 G(\mathbf{r}_{0,j}, \mathbf{r}_{0,k})\alpha_M^k G(\mathbf{r}_{0,k}, \mathbf{r}_{0,j})\alpha_M^j, \\ \alpha_{ijk} &= k^6 G(\mathbf{r}_{0,i}, \mathbf{r}_{0,j})\alpha_M^j G(\mathbf{r}_{0,j}, \mathbf{r}_{0,k})\alpha_M^k G(\mathbf{r}_{0,k}, \mathbf{r}_{0,i})\alpha_M^i, \\ \alpha_{ikj} &= k^6 G(\mathbf{r}_{0,i}, \mathbf{r}_{0,k})\alpha_M^k G(\mathbf{r}_{0,k}, \mathbf{r}_{0,j})\alpha_M^j G(\mathbf{r}_{0,j}, \mathbf{r}_{0,i})\alpha_M^i, \\ p_{ij} &= k^2 G(\mathbf{r}_{0,i}, \mathbf{r}_{0,j})\alpha_M^j p^{inc}(r_{0,j}), \\ p_{ik} &= k^2 G(\mathbf{r}_{0,i}, \mathbf{r}_{0,k})\alpha_M^k p^{inc}(r_{0,k}), \\ p_{ijk} &= k^4 G(\mathbf{r}_{0,i}, \mathbf{r}_{0,j})\alpha_M^j G(\mathbf{r}_{0,j}, \mathbf{r}_{0,k})\alpha_M^k p^{inc}(r_{0,k}), \\ p_{ikj} &= k^4 G(\mathbf{r}_{0,i}, \mathbf{r}_{0,k})\alpha_M^k G(\mathbf{r}_{0,k}, \mathbf{r}_{0,j})\alpha_M^j p^{inc}(r_{0,j}), \\ p_{jki} &= k^4 G(\mathbf{r}_{0,j}, \mathbf{r}_{0,k})\alpha_M^k G(\mathbf{r}_{0,k}, \mathbf{r}_{0,j})\alpha_M^j p^{inc}(r_{0,i}). \end{aligned}$$

Результаты сравнения сил, полученных с помощью метода Т-матриц в разделе 2 в случае рассеяния на трех частицах и по формуле (23) с использованием полученных выражений представлены на графиках 21.

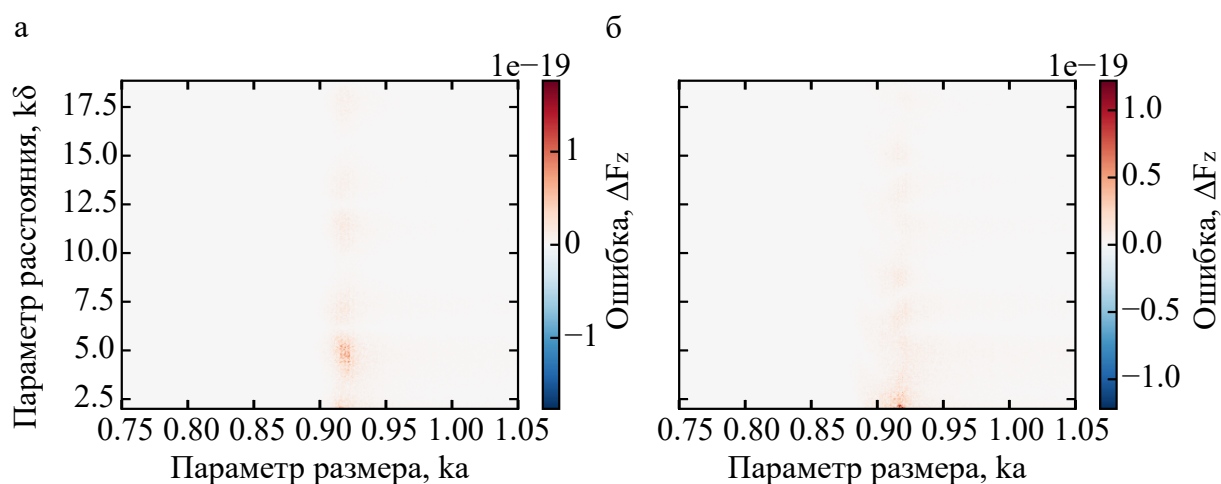


Рисунок 21 – Модуль абсолютной ошибки при сравнении z -компоненты силы, действующей на верхнюю частицу, вычисленной с помощью метода Т-матриц и используя функции Грина, в случае рассеяния стоячей волны на а) трех одинаковых сферических частицах б) трех частицах разных размеров из аэрогеля

Графики эффективных поляризуемостей, действующих на верхние частицы в случае рассеяния на трех частицах (рисунок 13 б, в) вычисленных по формуле (34) представлены на графиках 22.

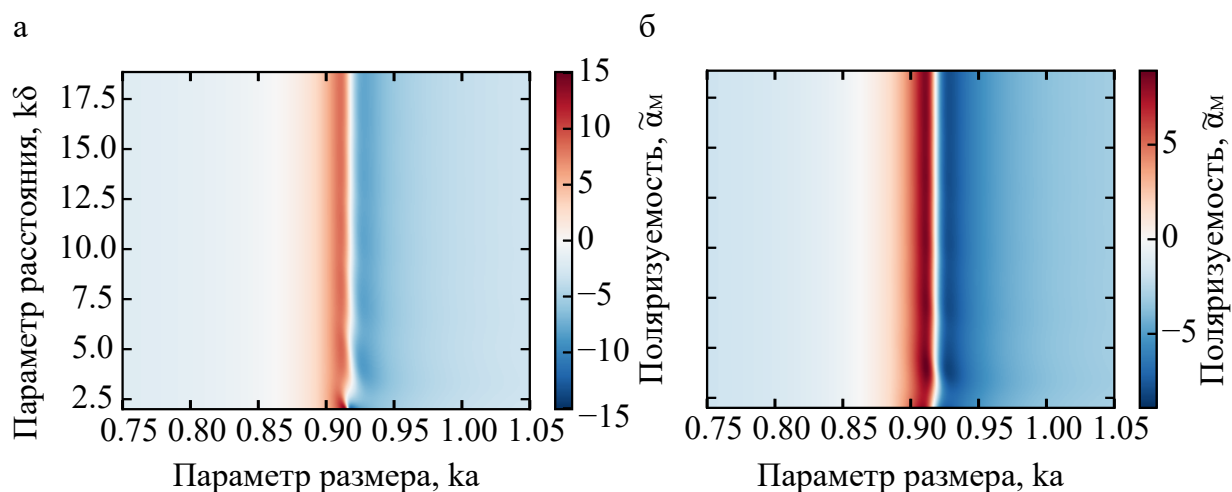


Рисунок 22 – Эффективная поляризуемость верхней частицы для случая а) трех одинаковых частиц б) трех частиц различных размеров