Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
GRADUATION THESIS

Возбуждение поверхностных акустических волн резонансными наноструктурами

Обучающийся / Student Альбицкая Христина Николаевна
Факультет/институт/кластер/ Faculty/Institute/Cluster физический факультет
Группа/Group Z34431
Направление подготовки/ Subject area 16.03.01 Техническая физика
Образовательная программа / Educational program Техническая физика 2019
Язык реализации ОП / Language of the educational program Русский
Статус ОП / Status of educational program
Квалификация/ Degree level Бакалавр
Руководитель ВКР/ Thesis supervisor Петров Михаил Игоревич, PhD, физико-математические науки, Университет ИТМО, физический факультет, старший научный сотрудник

Обучающийся/Student	Документ подписан Альбицкая Христина Николаевна 26.05.2023 (эл. подпись/ signature)	Альбицкая Христина Николаевна (Фамилия И.О./ name and surname)
Руководитель ВКР/ Thesis supervisor	Документ подписан Петров Михаил Игоревич 26.05.2023 (эл. подпись/ signature)	Петров Михаил Игоревич (Фамилия И.О./ name and surname)

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University

ЗАДАНИЕ НА ВЫПУСКНУЮ КВАЛИФИКАЦИОННУЮ РАБОТУ / OBJECTIVES FOR A GRADUATION THESIS

Обучающийся / Student Альбицкая Христина Николаевна
Факультет/институт/кластер/ Faculty/Institute/Cluster физический факультет
Группа/Group Z34431
Направление подготовки/ Subject area 16.03.01 Техническая физика
Образовательная программа / Educational program Техническая физика 2019
Язык реализации ОП / Language of the educational program Русский
Статус ОП / Status of educational program
Квалификация/ Degree level Бакалавр
Тема ВКР/ Thesis topic Возбуждение поверхностных акустических волн резонансными наноструктурами
Руководитель ВКР/ Thesis supervisor Петров Михаил Игоревич, PhD, физико-математические науки, Университет ИТМО, физический факультет, старший научный сотрудник

Основные вопросы, подлежащие разработке / Key issues to be analyzed
Построить аналитическую модель, которая позволяет описывать взаимодействие поверхностной акустической волны, распространяющейся вдоль плоской границы подложки с цилиндрическим рассеивателями, расположенными на ней.
1) Найти собственные моды закрытого цилиндрического упругого резонатора.
2) Верифицировать моды при помощи моделирования.
3) Изучить типы поверхностных и объемных акустических волн.
4) Аналитически записать связь мод цилиндр и бесконечного упругого полупространства.

Дата выдачи задания / Assignment issued on: 15.01.2023

Срок представления готовой ВКР / Deadline for final edition of the thesis 20.05.2023

Характеристика темы ВКР / Description of thesis subject (topic)

Тема в области фундаментальных исследований / Subject of fundamental research: да / yes
Тема в области прикладных исследований / Subject of applied research: нет / not

СОГЛАСОВАНО / AGREED:

Руководитель ВКР/ Thesis supervisor	Документ подписан	

Петров Михаил Игоревич 14.03.2023		Петров Михаил Игоревич

(эл. подпись)

Задание принял к исполнению/ Objectives assumed BY

Документ подписан Альбицкая Христина Николаевна 17.03.2023		Альбицкая Христина Николаевна

(эл. подпись)

Руководитель ОП/ Head of educational program

Документ подписан Белов Павел Александрович 18.05.2023		Белов Павел Александрович

(эл. подпись)

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University

АННОТАЦИЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
SUMMARY OF A GRADUATION THESIS

Обучающийся / Student Альбицкая Христина Николаевна
Факультет/институт/кластер/ Faculty/Institute/Cluster физический факультет
Группа/Group Z34431
Направление подготовки/ Subject area 16.03.01 Техническая физика
Образовательная программа / Educational program Техническая физика 2019
Язык реализации ОП / Language of the educational program Русский
Статус ОП / Status of educational program
Квалификация/ Degree level Бакалавр
Тема ВКР/ Thesis topic Возбуждение поверхностных акустических волн резонансными наноструктурами
Руководитель ВКР/ Thesis supervisor Петров Михаил Игоревич, PhD, физико-математические науки, Университет ИТМО, физический факультет, старший научный сотрудник

ХАРАКТЕРИСТИКА ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
DESCRIPTION OF THE GRADUATION THESIS

Цель исследования / Research goal
Основной целью исследования является изучение взаимодействия собственных состояний цилиндрического резонатора с волнами упругой подложки, на которой расположен цилиндр.
Задачи, решаемые в ВКР / Research tasks
1. Получить аналитическое и численное решение спектральной задачи для изотропного упругого цилиндра в вакууме. 2. Получить численное решение спектральной задачи для золотого цилиндра на сапфировой подложке. Выявить среди полученных собственных мод высокодобротные состояния.
Краткая характеристика полученных результатов / Short summary of results/findings
В ходе данного исследования были получены собственные частоты и выражения для полей смещения торсионных мод изотропного упругого цилиндра в вакууме. Численно найдены комплексные собственные частоты и поля смещений золотого цилиндрического резонатора на упругой подложке. Дано описание зависимости добротности вышеописанных состояний как функции геометрических параметров цилиндра.

Обучающийся/Student

Документ подписан	
Альбицкая Христина	

Альбицкая

Николаевна		Христина Николаевна
26.05.2023		
(эл. подпись/ signature)		(Фамилия И.О./ name and surname)

Руководитель ВКР/ Thesis supervisor

Документ подписан		
Петров Михаил Игоревич		Петров Михаил Игоревич
26.05.2023		
(эл. подпись/ signature)		(Фамилия И.О./ name and surname)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Возбуждение акустических волн с помощью оптических методов известно с конца XIX века [1], но активное изучение этого явления началось только после изобретения лазера. Обычно эффективность возбуждения поверхностных акустических волн с помощью коротких лазерных импульсов довольно низкая. Она сравнима с эффективностью в фотонике, когда электромагнитные поверхностные волны возбуждаются малой частицей, размещенной на подложке. Однако недавно в фотонике было показано, что использование резонансных наноантенн может существенно увеличить эффективность возбуждения [2]. Более того, интерференция нескольких резонансов в одной наноантенне может привести к направленному возбуждению и управлению поверхностными электромагнитными волнами [3],[4]. Интерес представляет получение аналогичных результатов в акустике. Появились экспериментальные методы возбуждения механических колебаний, основанные на свойствах металлических наночастиц различной формы: параллелепипед [5] (рисунок 1), асимметричного цилиндр [6], цилиндра [7],[8].

Когда плазмонная наночастица подвергается воздействию оптического излучения с частотой, близкой к резонансной частоте поверхностного плазмоного резонанса, возникает явление локализации электромагнитной энергии вблизи её поверхности [9]. Коллективные колебания электронов в частице приводят к генерации тепла. Вследствие нагрева происходит расширение наночастицы, что вызывает механические колебания наноструктуры, а они в свою очередь передают энергию подложке, возбуждая различные акустические волны в ней.

Резонаторы в наноакустике, также как и в нанофотонике, представляют собой открытые системы, поскольку собственные моды резонатора связаны с излучательным континуумом окружающей среды. Чем сильнее связь с континуумом, тем выше излучательные потери. Однако такая связь может быть значительно или полностью подавлена. В этом случае возникает не излучающее (высокодобротное) состояние [10]. Этот феномен называется связанным состоянием в континууме [11]. Он был изначально предсказан в квантовой механике, но в настоящее время активно изучается в фотонике [10] . В случае, когда связь с континуумом значительно подавлена, но не

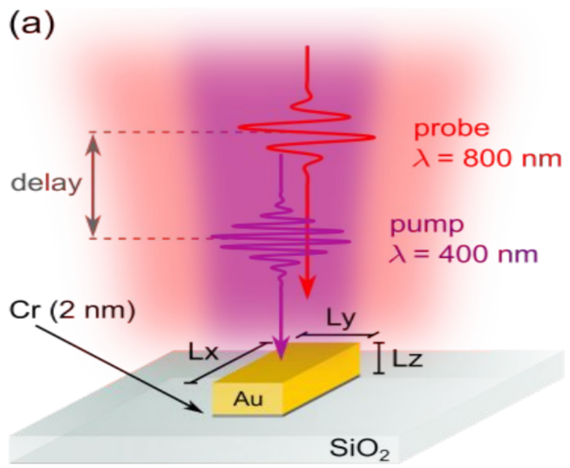

Рисунок 1 – Пример из [5] возбуждения механических колебаний посредством лазерных импульсов, передающих энергию плазмонной наночастице

полностью, устанавливается квази-связанное состояние в континууме [12]. Для цилиндрического акустического резонатора недавно была разработана теория акустических связанных состояний в континууме [13].

Экспериментально исследуется возбуждение поверхностной волны при помощи металлической наночастицы [14], а также взаимодействие пар наночастиц посредством поверхностных акустических волн [15].

Данное исследование применимо для улучшения точности датчиков, измеряющих массу малого объекта [16],[17]. Характерная рабочая частота акустического датчика, использующего поверхностные акустические волны, составляет около 100 МГц [18]. Однако чувствительность к изменению массы возрастает с увеличением рабочей частоты [19]. Поэтому высокодобротные наноакустические резонаторы, работающие в диапазоне ГГц, являются актуальными для создания компактных акустических биосенсоров [20].

Взаимодействие между модами частицы и волнами в подложке зависит от параметров системы, таких как геометрические размеры и форма частицы [17], свойства упругой подложки и окружающей среды. Рассматриваемая нами модель состоит из золотого цилиндра на сапфировой подложке в вакууме (рисунок 2). Выбор геометрии задачи обусловлен тем, что ни для одной формы резонатора ещё не существует теоретического исследования на данную тему, но для акустического цилиндрического резонатора в вакууме была разработана теория акустических связанных состояний в континууме [13],

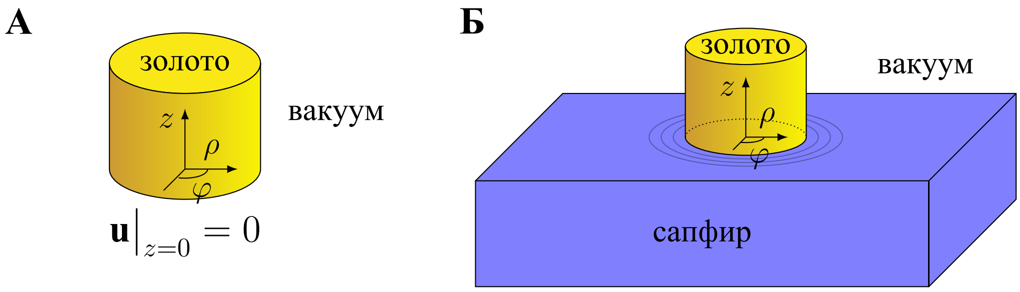

Рисунок 2 – **А** схематическое изображение приближенной системы. Золотой цилиндр в вакууме с граничными условиями на нижнем основании ''граница с абсолютно жёстким телом''. **Б** - схематическое изображение рассматриваемой системы. Золотой цилиндр располагается на сапфировой $\alpha - Al_2O_3$ подложке, размеры которой много больше размеров цилиндра. Снаружи вакуум

которые могли бы стать первым приближением для высокодобротных мод системы цилиндра на подложке. Выбор материалов обусловлен тем, что именно с ними существует экспериментальное исследование [7], с которым было произведено сравнение на последнем этапе работы.

Геометрия задачи определяется параметром

$$\eta = \frac{D}{h}, \tag{1}$$

где D диаметр цилиндра, h высота цилиндра.

Добротность (Q-фактор) определяет, насколько быстро затухают колебания в системе. Для системы, колеблющейся с частотой $w - i\gamma$

$$Q = \frac{w}{2\gamma}. \tag{2}$$

Целью работы является изучение взаимодействия высокодобротных мод цилиндра с поверхностными акустическими волнами в подложке. В соответствии с поставленной целью были сформулированы следующие задачи:

а) для изотропного упругого цилиндра в вакууме получить аналитически выражения для частот и конфигураций полей собственных мод,

б) численно решить спектральную задачу для системы (Б) для нахождения высокодобротных собственных состояний в ней.

Задача а) решается в некоторых работах, но лишь полуаналитическими методами [21],[22],[23].

Ход работы: В разделе 1 решается аналитическая задача на поиск собственных мод цилиндра в вакууме с граничными условиями, соответствующими приближению системы: упругий цилиндр на жёсткой подложке (рисунок 2 А).

В разделе 2 производится численное решение спектральной задачи из раздела 1. Вокруг найденных в приближении частот производится численный поиск высокодобротных мод системы: упругий цилиндр на сапфировой подложке (рисунок 2 Б).

1 АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СОБСТВЕННЫХ МОД ЦИЛИНДРА В ВАКУУМЕ

Важно отметить, что все аналитические расчёты в данной работе проводятся на классическом языке, так как

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{c}{a \cdot \nu} \approx \frac{3 \cdot 10^2}{4 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{10}} = 10^2,$$

где λ исследуемая длина волны колебаний, ν исследуемая частота колебаний наночастиц, c скорость звука в золоте, a характерный размер решётки золота.

Из того, что λ на два порядка больше чем a следует, что описание механических колебаний системы можно производить не переходя к квантовому её описанию.

1.1 Вывод волнового уравнения для смещений в изотропной упругой среде

Второй закон Ньютона для движения упругой среды представим в виде

$$\rho \ddot{\boldsymbol{u}} = \nabla \cdot \hat{\sigma}, \tag{3}$$

где ρ плотность среды, $\boldsymbol{u}$ поле смещений, $\hat{\sigma}$ тензор напряжений Коши, который выражается через поле смещений посредством закона Гука,

$$\hat{\sigma} = \hat{C} : \hat{\varepsilon} \quad \text{или} \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{4}$$

где $\hat{C}$ тензор четвёртого ранга модулей упругости, $\hat{\varepsilon}$ тензор малых деформаций

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}\big(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T\big). \tag{5}$$

Для изотропной среды тензор модулей упругости в нотации Фойгта представим в виде

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ . & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ . & . & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \mu & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \mu & 0 \\ . & . & . & . & . & \mu \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}), \tag{7}$$

где λ и μ коэффициенты Ламэ. Используя уравнение (7), закон Гука (4) можно записать в следующем виде

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}. \tag{8}$$

Подставляя уравнение (8) в уравнение (3), в предположении гармонической зависимости поля смещений от времени $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) \propto \boldsymbol{A(r)}e^{-i\omega t}$

$$\rho\omega^2\boldsymbol{u} + (\lambda + 2\mu)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u} - \mu\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u} = 0. \tag{9}$$

Воспользуемся теоремой разложения Гельмгольца, представим поле смещений в виде суммы безвихревого поля $\boldsymbol{u_p}$ и соленоидального поля $\boldsymbol{u_s}$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_s} + \boldsymbol{u_p}, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u_s} = 0, \quad \nabla\times\boldsymbol{u_p} = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Применяя уравнение (10) к уравнению (9), используя равенство

$$\Delta = \nabla\nabla\cdot - \nabla\times\nabla\times \tag{11}$$

уравнение (9) разделяется на два независимых уравнения. Первое для продольной волны, второе для поперечной

$$\Delta\boldsymbol{u}_i + k_i^2\boldsymbol{u}_i = 0, \tag{12}$$

где индексы $i = p,s$ соответствуют продольной и поперечной волне, соответственно, $|k_i| = \omega/c_i$ волновой вектор продольной или поперечной волны, $c_p^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ и $c_s^2 = \mu/\rho$ скорости продольной и поперечной волн в упругой среде.

1.2 Решение уравнения Гельмгольца

Для решения уравнения Гельмгольца (12) введём для дальнейшего удобства цилиндрическую систему координат (ρ,φ,z). Вектор смещений представим в виде

$$\mathbf{u} = u_\rho\,\mathbf{e}_\rho + u_\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + u_z\,\mathbf{e}_z. \tag{13}$$

Волновой вектор для продольной и поперечной волны представим в виде

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{k_s}|^2 &= (k_\rho^s)^2 + (k_z)^2 = \left(\frac{\omega}{c^s}\right)^2, \\ |\boldsymbol{k_p}|^2 &= (k_\rho^p)^2 + (k_z)^2 = \left(\frac{\omega}{c^p}\right)^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Лапласиан в цилиндрических координатах записывается как

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\Big) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{15}$$

Скалярное уравнение Гельмгольца записывается как

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0. \tag{16}$$

Решаем скалярное уравнение (16) методом разделения переменных [24]. Представим скалярную функцию $\psi(\rho,\varphi,z)$ в виде

$$\psi(\rho,\varphi,z) = R(\rho)\varphi(\varphi)Z(z). \tag{17}$$

Подставляя оператор Лапласа в цилиндрических координатах (15) в уравнение (16), получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\rho^2}\Phi Z + \frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\rho}\Phi Z + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}RZ + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}R\Phi + k^2 R\Phi Z = 0. \tag{18}$$

Умножим на $\rho^2/(R\Phi Z)$

$$\Big(\frac{\rho^2}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial\rho^2} + \frac{\rho}{R}\frac{\partial R}{\partial\rho}\Big) + \frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\rho^2}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2\rho^2 = 0. \tag{19}$$

Отсюда следует, что для переменной φ

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = -m^2. \tag{20}$$

Отрицательный знак константы обусловлен тем, что в цилиндрических координатах решение должно быть периодическим по φ, m - целое.
Решением уравнения (20) является линейная суперпозиция двух функций

$$\Phi(\varphi) = C_m \cos(m\varphi) + D_m \sin(m\varphi). \tag{21}$$

Подставим (21) обратно в (19)

$$\Big(\frac{\rho^2}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{R}\frac{\partial R}{\partial \rho}\Big) - m^2 + \frac{\rho^2}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2\rho^2 = 0. \tag{22}$$

Разделим (22) на ρ^2

$$\Big(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho R}\frac{\partial R}{\partial \rho}\Big) - \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = 0, \tag{23}$$

следовательно для переменной z получается уравнение вида

$$\begin{gathered} \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = (ik_z)^2, \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k_z^2 Z = 0. \end{gathered} \tag{24}$$

Решение уравнения (24) имеет вид

$$Z(z) = E(k_z)e^{-ik_z z} + F(k_z)e^{ik_z z}. \tag{25}$$

Подставляя (25) обратно в (23) и умножая на R, получаем

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial \rho} + \Big(-\frac{m^2}{\rho^2} - k_z^2 + k^2\Big)R = 0. \tag{26}$$

Уравнение (26) является уравнением Бесселя. Его решение имеет следующий вид [25]

$$R(\rho) = A_m(k_z)J_m(\rho\sqrt{-k_z^2 + k^2}) + B_m(k_z)Y_m(\rho\sqrt{-k_z^2 + k^2}), \tag{27}$$

где $J_m(x)$ и $Y_m(x)$ это первая и вторая функции Бесселя, соответственно, следовательно полное решение

$$\psi(r,\phi,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dk_z\Big[A_m(k_z)J_m(\rho\sqrt{-k_z^2+k^2})+B_m(k_z)Y_m(\rho\sqrt{-k_z^2+k^2})\Big]\times$$
$$\times\Big(C_m\cos(m\phi)+D_m\sin(m\phi)\Big)\Big[E(k_z)e^{-ik_zz}+F(k_z)e^{ik_zz}\Big] \tag{28}$$

Положим $B_m=0$, так как второе линейно независимое решение уравнения Бесселя (функция Неймана) имеет сингулярность в нуле координат.
Введём обозначение: $k_\rho^2=-k_z^2+k^2$, согласующееся с введённым ранее (14).
Чётное по z решение скалярного уравнения Гельмгольца

$$\psi^{\text{ч}}(r,\phi,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dk_z\Big[A_m(k_z)J_m(\rho\sqrt{-k_z^2+k^2})+B_m(k_z)Y_m(\rho\sqrt{-k_z^2+k^2})\Big]\times$$
$$\times\Big(C_m\cos(m\phi)+D_m\sin(m\phi)\Big)\Big[Q(k_z)\cos(k_zz)\Big]. \tag{29}$$

Нечётное по z решение скалярного уравнения Гельмгольца

$$\psi^{\text{н}}(r,\phi,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dk_z\Big[A_m(k_z)J_m(\rho\sqrt{-k_z^2+k^2})+B_m(k_z)Y_m(\rho\sqrt{-k_z^2+k^2})\Big]\times$$
$$\times\Big(C_m\cos(m\phi)+D_m\sin(m\phi)\Big)\Big[V(k_z)\sin(k_zz)\Big]. \tag{30}$$

Нас интересует решение векторного уравнения Гельмгольца (12). Оно представимо в виде разложения по цилиндрическим векторным гармоникам

$$\boldsymbol{u}(\rho,\phi,z)=\boldsymbol{M}(\rho,\phi,z)+\boldsymbol{N}(\rho,\phi,z)+\boldsymbol{L}(\rho,\phi,z), \tag{31}$$

где каждая векторная гармоника выражается через решение скалярного уравнения Гельмгольца (28)

$$\boldsymbol{L}=\nabla\psi,\quad \boldsymbol{M}=\nabla\times(\boldsymbol{e_z}\psi),\quad \boldsymbol{N}=\frac{1}{k}\nabla\times\boldsymbol{M}. \tag{32}$$

Свойства векторных гармоник

$$\nabla \times \boldsymbol{L} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{M} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{N} = 0, \tag{33}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{L} = k_p^2 \psi, \quad \nabla \times \boldsymbol{M} = \frac{1}{k_s}\boldsymbol{N}, \quad \nabla \times \boldsymbol{N} = \frac{1}{k_s}\boldsymbol{M}.$$

Подставляя (29) и (31) в (32), получаем самый общий вид решения

$$\boldsymbol{u} = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \Big(a_m^{\text{н}}(k_z)\boldsymbol{L}_m^{\text{н}}(k_z,k_\rho^p) + a_m^{\text{ч}}(k_z)\boldsymbol{L}_m^{\text{ч}}(k_z,k_\rho^p) + \tag{34}$$
$$+ b_m^{\text{н}}(k_z)\boldsymbol{M}_m^{\text{н}}(k_z,k_\rho^s) + b_m^{\text{ч}}(k_z)\boldsymbol{M}_m^{\text{ч}}(k_z,k_\rho^s) + c_m^{\text{н}}(k_z)\boldsymbol{N}_m^{\text{н}}(k_z,k_\rho^s) +$$
$$+ c_m^{\text{ч}}(k_z)\boldsymbol{N}_m^{\text{ч}}(k_z,k_\rho^s)\Big)\Big(C_m \cos(m\phi) + D_m \sin(m\phi)\Big).$$

Зависимость от ρ, ϕ, z опущена для краткости, как и везде далее

$$\boldsymbol{M}_m^{\text{н}}(k_z,k_\rho^s) = \begin{bmatrix} i\frac{m}{\rho} J_m(k_\rho^s \rho) \\ -\dfrac{\partial J_m(k_\rho^s \rho)}{\partial \rho} \\ 0 \end{bmatrix} \sin(k_z z) \tag{35}$$
$$\boldsymbol{M}_m^{\text{ч}}(k_z,k_\rho^s) = \begin{bmatrix} i\frac{m}{\rho} J_m(k_\rho^s \rho) \\ -\dfrac{\partial J_m(k_\rho^s \rho)}{\partial \rho} \\ 0 \end{bmatrix} \cos(k_z z)$$

$$\boldsymbol{N}_m^{\text{н}}(k_z,k_\rho^s) = \begin{bmatrix} \dfrac{k_z}{k_s}\dfrac{\partial J_m(k_\rho^s \rho)}{\partial \rho}\cos(k_z z) \\ i\dfrac{k_z m}{k^s \rho} J_m(k_\rho^s \rho)\cos(k_z z) \\ -\dfrac{(k_\rho^s)^2 J_m(k_\rho^s \rho)}{k^s}\sin(k_z z) \end{bmatrix} \tag{36}$$
$$\boldsymbol{N}_m^{\text{ч}}(k_z,k_\rho^s) = \begin{bmatrix} -\dfrac{k_z}{k_s}\dfrac{\partial J_m(k_\rho^s \rho)}{\partial \rho}\sin(k_z z) \\ -i\dfrac{k_z m}{k^s \rho} J_m(k_\rho^s \rho)\sin(k_z z) \\ -\dfrac{(k_\rho^s)^2 J_m(k_\rho^s \rho)}{k^s}\cos(k_z z) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}^{\text{н}}_m(k_z,k^p_\rho) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial J_m(k^p_\rho \rho)}{\partial \rho}\sin(k_z z) \\ i\dfrac{m}{\rho} J_m(k^p_\rho \rho)\sin(k_z z) \\ k_z J_m(k^p_\rho \rho)\cos(k_z z) \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$\boldsymbol{L}^{\text{ч}}_m(k_z,k^p_\rho) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial J_m(k^p_\rho \rho)}{\partial \rho}\cos(k_z z) \\ i\dfrac{m}{\rho} J_m(k^p_\rho \rho)\cos(k_z z) \\ -k_z J_m(k^p_\rho \rho)\sin(k_z z) \end{bmatrix}.$$

1.3 Аналитическое нахождение собственных мод цилиндра в вакууме

Рассмотрим упругий цилиндр в свободном пространстве (в вакууме). Цилиндр имеет аксиальную симметрию, поэтому задача решается в цилиндрической системе координат с началом в центре нижнего основания цилиндра. Высота цилиндра h, радиус r (рисунок 2 А).

На свободной границе равны нулю компоненты тензора упругого напряжения. Так как цилиндр находится в вакууме, то граничные условия на границах с вакуумом имеют вид [26]

$$\sigma_{nn}\Big|_{\rho=r,z=h} = \sigma_{n\tau}\Big|_{\rho=r,z=h} = 0, \tag{38}$$

где n и τ нормальная и тангенциальная к поверхности компоненты. Такие граничные условия называются ’’свободной границей’’.

В данном исследовании нас интересуют высокодобротные моды цилиндра на подложке, а модель цилиндра в вакууме служит приближением, поэтому условия на нижнем основании цилиндра $z = 0$ были заменены на граничные условия вида

$$\boldsymbol{u}\Big|_{z=0} = 0 \tag{39}$$

такие граничные условия соответствуют границе с абсолютно жёстким телом. Тензор малых деформаций (5) в цилиндрических координатах

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \qquad \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\rho}{\rho} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\right] \quad \varepsilon_{\rho z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho}\right] \quad \varepsilon_{\rho\varphi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi}\right]. \tag{40}$$

Выразим все граничные условия на боковой грани цилиндра $\rho = r$ через смещения:

1) $\sigma_{\rho z} = 0$

$$\left.\frac{\partial u_\rho}{\partial z}\right|_{\rho=r} + \left.\frac{\partial u_z}{\partial \rho}\right|_{\rho=r} = 0, \tag{41}$$

2) $\sigma_{\rho\varphi} = 0$

$$\left.\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho}\right|_{\rho=r} - \left.\frac{u_\varphi}{\rho}\right|_{\rho=r} + \left.\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi}\right|_{\rho=r} = 0, \tag{42}$$

3) $\sigma_{\rho\rho} = 0$

$$\lambda\left(\left.\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}\right|_{\rho=r} + \left.\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right|_{\rho=r} + \left.\frac{u_\rho}{\rho}\right|_{\rho=r} + \left.\frac{\partial u_z}{\partial z}\right|_{\rho=r}\right) + 2\mu\left.\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}\right|_{\rho=r} = 0. \tag{43}$$

Выразим все граничные условия на верхнем основании цилиндра $z = h$ через смещения:

1) $\sigma_{z\varphi} = 0$

$$\left.\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}\right|_{z=h} + \left.\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\right|_{z=h} = 0, \tag{44}$$

2) $\sigma_{z\rho} = 0$

$$\left.\frac{\partial u_\rho}{\partial z}\right|_{z=h} + \left.\frac{\partial u_z}{\partial \rho}\right|_{z=h} = 0, \tag{45}$$

3) $\sigma_{zz} = 0$

$$\lambda\left(\left.\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}\right|_{z=h} + \frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right|_{z=h} + \left.\frac{u_\rho}{\rho}\right|_{z=h} + \left.\frac{\partial u_z}{\partial z}\right|_{z=h}\right) + 2\mu\left.\frac{\partial u_z}{\partial z}\right|_{z=h} = 0. \tag{46}$$

Граничные условия на нижнем основании цилиндра $z = 0$

$$\boldsymbol{u}\big|_{z=0} = 0. \tag{47}$$

Для поиска аналитического решения положим $m = 0$, возьмём анзац в виде

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{L}_0^{\text{н}}(k_z,k_\rho^s) + a_2\boldsymbol{L}_0^{\text{ч}}(k_z,k_\rho^s) + b_1\boldsymbol{M}_0^{\text{н}}(k_z,k_\rho^s) + \\ + b_2\boldsymbol{M}_0^{\text{ч}}(k_z,k_\rho^s) + c_1\boldsymbol{N}_0^{\text{н}}(k_z,k_\rho^s) + c_2\boldsymbol{N}_0^{\text{ч}}(k_z,k_\rho^s).\end{gathered} \tag{48}$$

При подстановке (48) в граничные условия на основании цилиндра (47), получаем

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -a_2k_\rho^pJ_1(k_\rho^p\rho) - c_1\frac{c_s}{w}k_\rho^sk_zJ_1(k_\rho^s\rho) \\ b_2k_\rho^sJ_1(k_\rho^s\rho) \\ a_1k_zJ_0(k_\rho^p\rho) + c_2\frac{c_s}{w}(k_\rho^s)^2J_0(k_\rho^s\rho) \end{bmatrix} = 0. \tag{49}$$

Так как уравнения (49) должны быть выполнены при любом ρ, с учётом того, что функции $J_n(k_\rho^s\rho)$ и $J_n(k_\rho^p\rho)$ линейно независимы при $k_\rho^s \neq k_\rho^p$, имеем $b_2 = a_1 = c_1 = c_2 = a_2 = 0$, откуда следует вид смещения

$$\boldsymbol{u} = b_1\boldsymbol{M}_0^{\text{н}}(k_z,k_\rho^s) = \begin{bmatrix} 0 \\ k_\rho^sJ_1(k_\rho^s\rho) \\ 0 \end{bmatrix} b_1\sin(k_zz). \tag{50}$$

Подставим (50) во все оставшиеся граничные условия, представленные выше,

$$\begin{gathered}\sigma_{\rho z}=0,\\ \sigma_{\rho\rho}=0,\\ \sigma_{\rho\varphi}=0\Rightarrow (k_\rho^s)^2 J_2(k_\rho^s\rho)b_1\sin(k_z z)=0.\end{gathered}\tag{51}$$

Уравнения (51) должны быть выполнены при любом z, тогда

$$J_2(k_\rho^s r)=0\tag{52}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{z\rho}=0,\\ \sigma_{zz}=0,\\ \sigma_{z\varphi}=0\Rightarrow k_\rho^s k_z J_1(k_\rho^s\rho)b_1\cos(k_z h)=0.\end{gathered}\tag{53}$$

Уравнения (53) должны быть выполнены при любом ρ, следовательно

$$b_1\cos(k_z h)=0.\tag{54}$$

Объединяя уравнения (52), (53), (54), получаем систему уравнений на собственные частоты

$$\begin{cases}J_2(k_\rho^s r)=0\\ k_z h=\dfrac{\pi(1+2n)}{2}\\ k_z^2+k_\rho^{s2}=\left(\dfrac{w}{c_s}\right)^2\end{cases}\qquad \nu=c_s\sqrt{\frac{{\alpha_i}^2}{4r^2\pi^2}+\frac{(1+2n)^2}{16h^2}},\tag{55}$$

где α_i это i-ый корень второй функции Бесселя, n — целое число, c_s — поперечная скорость звука в веществе, h — высота цилиндра, r — радиус цилиндра. При этом вид смещений для полученной моды

$$u_\rho=0,\quad u_z=0,\quad u_\varphi=b_1 k_\rho^s J_1(k_\rho^s\rho)\sin(k_z z).\tag{56}$$

При $k_\rho^s\to 0$ асимптотика функции Бесселя

$$J_1(kx)\to\frac{kx}{2}\tag{57}$$

тогда вид смещений и собственных частот

$$u_\varphi = b_1(k^s_\rho)^2\rho\sin(k_z z) \qquad \nu = \frac{(1+2n)c_s}{4h}. \tag{58}$$

При взятии в качестве анзаца выражения (48) для поля смещений, область решений была сужена до собственных мод, зависящих лишь от одного k_z, так как выражение (48) не содержит интеграла по k_z. Также сумма по m заменена $m = 0$. В таком простом виде удалось найти решения для поля смещений (55), имеющего только ϕ компоненту, то есть для крутильных колебаний цилиндра.

2 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В данной главе представлены результаты численного моделирования в пакете COMSOL Multiphysics™. Будем обозначать колебания с $u_\rho \neq 0$ и $u_z \neq 0$ ρz-модой, а только с одной компонентой смещений $u_\phi \neq 0$ обозначим как ϕ-мода. Задача аксиально симметрична, поэтому на всех графиках представлен один радиальный разрез.

Данные взяты из [27] $c_s = 1200$ м/с - скорость звука поперечная в золоте, $c_p = 3200$ м/с - скорость звука продольная в золоте, $\rho = 19300$ кг/м^3 - плотность золота. $c_s = 6630$ м/с - скорость звука поперечная в сапфире, $c_p = 11250$ м/с - скорость звука продольная в сапфире, $\rho = 3980$ кг/м^3 - плотность сапфира.

2.1 Цилиндр в вакууме

В разделе 1 были аналитически получены некоторые моды цилиндра в вакууме с жёсткими граничными условиями на основании цилиндра (рисунок 2 А). Сравним их с собственными частотами цилиндра, полученными численным моделированием с такими же граничными условиями. Начнём с наименьших найденных численно частот.

Первая серия ϕ-мод представлена на графике (рисунок 3). Это первая крутильная мода, в которой каждый следующий бесконечно малый диск колеблется с большей угловой скоростью, чем предыдущий. Значение для частот и полей смещения полностью совпали с аналитическим решением (58). В данной моде $k_\rho^s = 0$, зависимость $u_\varphi(\rho)$ линейная. В высоту цилиндра укладываются $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{4}$ синуса, соответственно, так как зависимость поля смещений от z: $u_\phi(z) \propto \sin(k_z z)$.

Вторая серия ϕ - мод (рисунок 4). Аналитическое выражение для этого типа мод (55) при $n = 0$. Каждая следующая мода (а),(б),(в) соответствует следующему корню α_i функции Бесселя J_2. Количество максимумов поля вдоль радиуса цилиндра соответствует количеству экстремумов J_1, приходящихся на отрезок $[0,\alpha_i]$.

Для третьей серии ϕ-мод (рисунок 5) аналитическое выражение тоже (55), но квантовое число по оси z для данного типа мод $n = 1$ для (а),(б) и $n = 2$ для (в). Вид поля смещений вдоль оси z и вдоль радиуса цилиндра ρ определяется совокупностью условий для двух предыдущих мод. Вдоль радиуса укладываются экстремумы J_1, в высоту нули синуса. Численно больше не было обнаружено крутильных мод (ϕ - мод). Значит мы

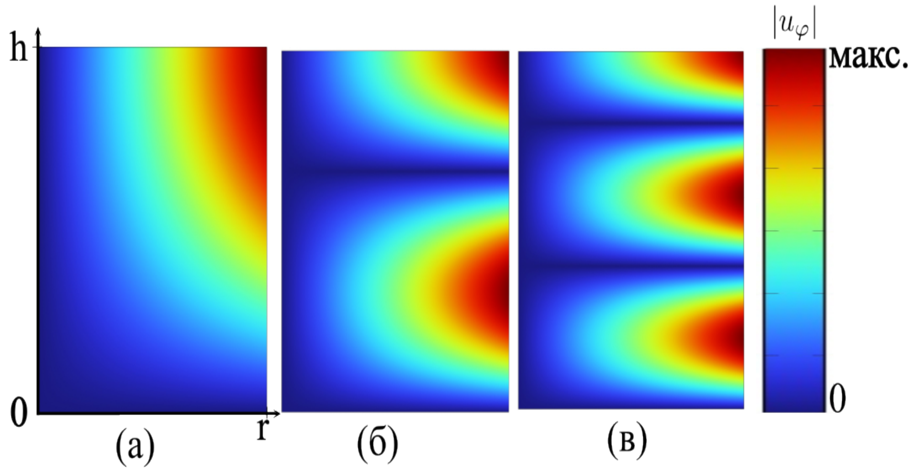

Рисунок 3 – На графике представлено поле модуля смещений для ϕ - моды. Высота цилиндра $h = 4$ м, радиус $r = 3$ м. Аналитическое выражение для смещения и собственных частот (58). Графику (а) соответствует $n = 0$, графику (б) $n = 1$, графику (в) $n = 2$

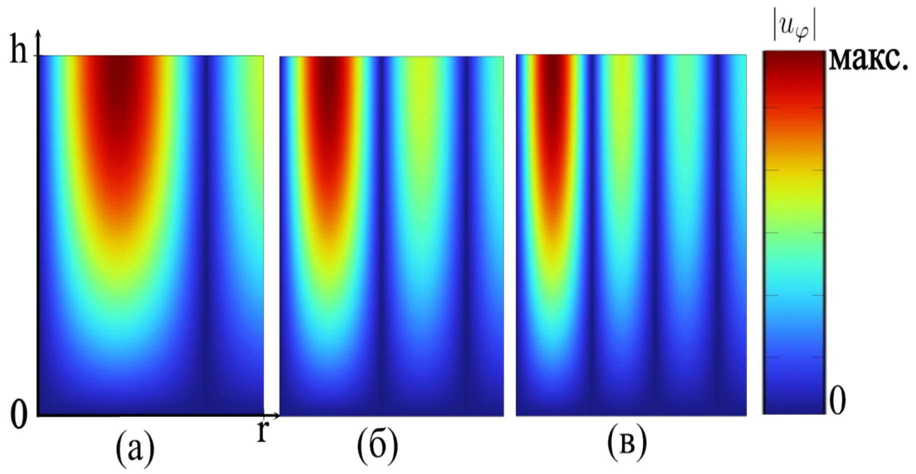

Рисунок 4 – На графике представлено поле модуля смещений для ϕ - моды. Высота цилиндра $h = 4$ м, радиус $r = 3$ м. Аналитическое выражение для смещения и собственных частот (55). Графику (а) соответствует $n = 0$ и α_1, графику (б) $n = 0$ и α_2, графику (в) $n = 0$ и α_3

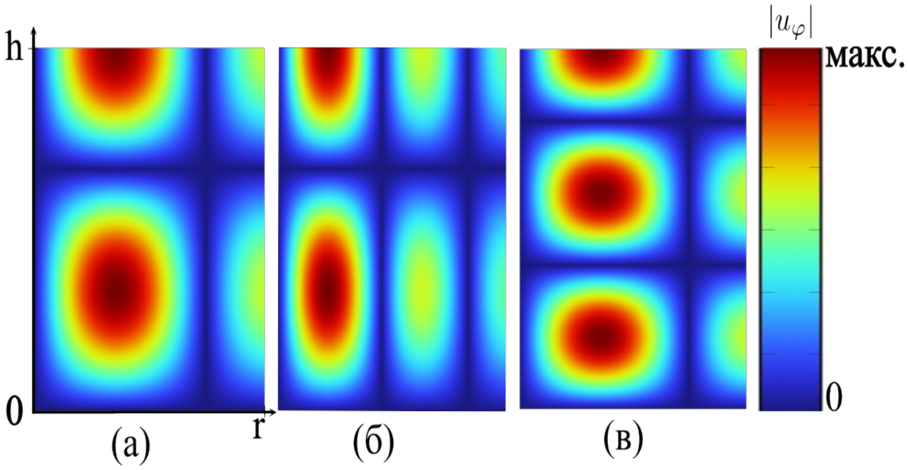

Рисунок 5 – На графике представлено поле модуля смещений для ϕ - моды. Высота цилиндра $h = 4$ м, радиус $r = 3$ м. Аналитическое выражение для смещения и собственных частот 55. Графику (а) соответствует $n = 1$ и α_1, графику (б) $n = 1$ и α_2, графику (в) $n = 2$ и α_1

аналитически нашли все ϕ - моды. Также были найдены численно ρz - моды (рисунок 6). Они локализованы в верхней части цилиндра. Существуют и иные ρz - моды, но при появлении подложки они не являются высокодобротными, поэтому в рассмотрении не участвуют.

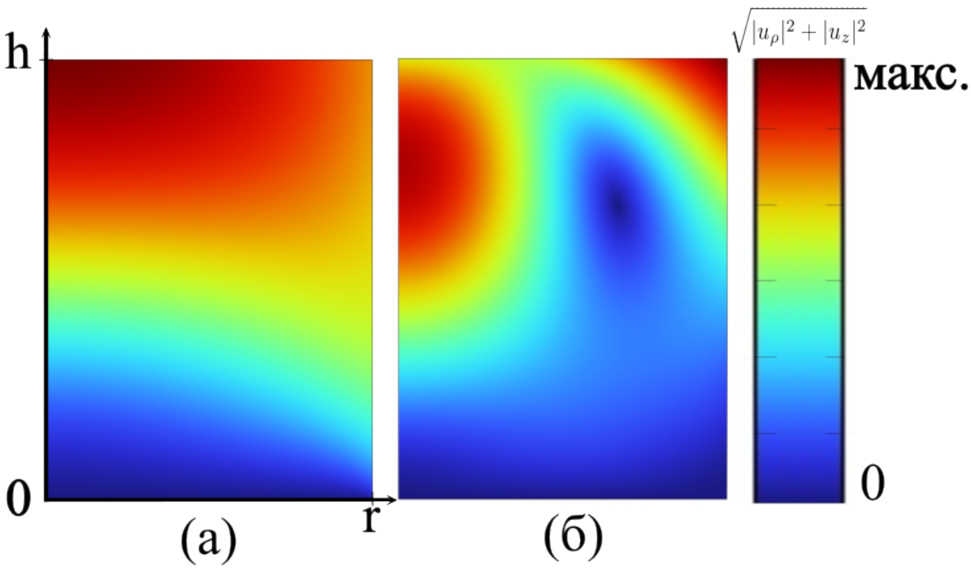

Рисунок 6 – На графике представлено поле модуля смещений для ρz - моды. Высота цилиндра $h = 4$ м, радиус $r = 3$ м.

2.2 Цилиндр на подложке

В данном разделе моделировалась система, состоящая из золотого цилиндра на сапфировой подложке (рисунок 2 Б). Введём величину объёма моды, имеющую размерность $[\text{м}]^3$, вычисляемую для каждой моды

$$V_{\text{моды}} = \frac{\iiint |\mathbf{u}|^2 dV}{\max.(|\mathbf{u}|^2)_V},$$

где интеграл в числителе берётся по всему объёму системы от квадрата модуля смещений $\boldsymbol{u}$. В знаменателе находится квадрат модуля максимального смещения во всём пространстве. Деля объём моды на объём цилиндра, получаем безразмерную характеристику для локализации данной моды внутри цилиндра

$$\tilde{V} = \frac{V_{\text{моды}}}{V_{\text{цил.}}} = \frac{\iiint |\mathbf{u}|^2 dV}{\max.|\mathbf{u}|^2 V_{\text{цил.}}}. \tag{59}$$

Данная характеристика $\tilde{V}$ используется для поиска потенциально добротных мод в системе, то есть рассматриваются лишь те, у которых $\tilde{V} \leqslant 1$. Производится численный расчёт открытой системы методом конечных элементов, результат зависит от размера сетки в каждой области и от размера подложки. Были выявлены оптимальный размер сетки и радиус подложки (35 м), после которого значения вычисляемых величин (частота, Q-фактор) изменяются менее чем на 2%.

Используя в качестве пристрелочного параметра собственные частоты, найденные в приближенной модели, удалось обнаружить несколько серий высокодобротных мод (рисунок 7). а и б ветки соответствуют ϕ - модам предыдущей задачи (рисунок 3 (а),(б)), соответственно. Вид поля модуля смещений для а,б мод (рисунок 8). Их добротность возрастает до бесконечности с уменьшением радиуса при фиксированной высоте цилиндра. в,г,д ветки соответствуют ϕ - модам предыдущей задачи (рисунок 4). Вид поля модуля смещений для в,г,д мод (рисунок 9).

Интересно отметить, что при переходе от системы А (цилиндр в вакууме) к Б (цилиндр на подложке) значение действительной частоты для одной и той же моды уменьшается при одинаковых геометрических параметрах цилиндра. Это объясняется тем, что добавление подложки увеличивает эффективную (участвующую в колебаниях) высоту цилиндра и радиус, а с увеличением высоты или радиуса частота понижается, что следует из уравнения (55).

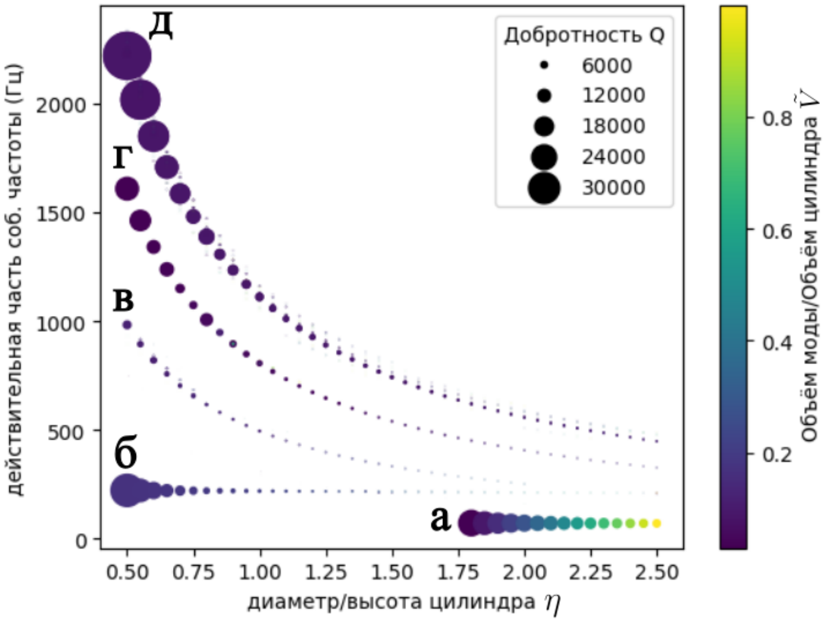

Рисунок 7 – График зависимости действительной части частоты от геометрической характеристики цилиндра $\eta = \frac{D}{h}$. Цветом показано отношение объёма моды к объёму цилиндра $\tilde{V}$, площадь, занимаемая каждой точкой, пропорциональна значению добротности Q (2)

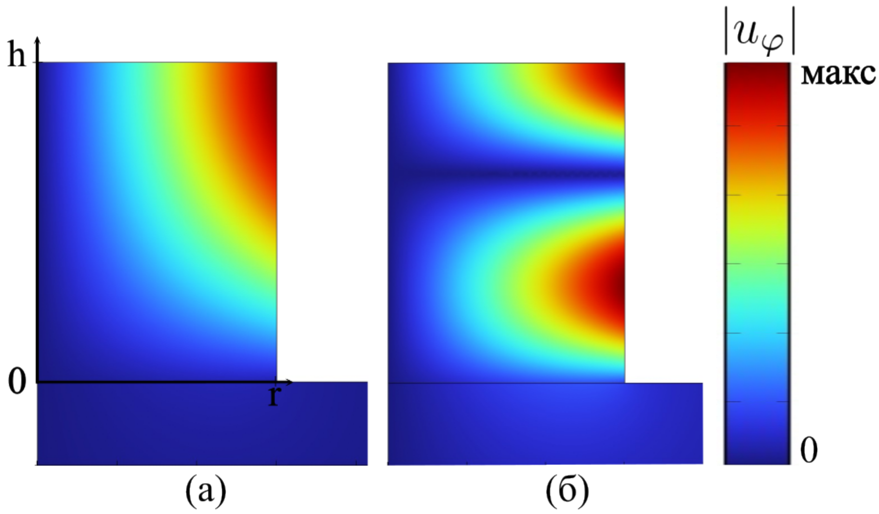

Рисунок 8 – На графике представлено поле модуля смещений для ϕ - моды. Высота цилиндра $h = 4$ м, радиус $r = 3$ м. Графику (а) соответствует мода **а** на рисунке 7. Графику (б) соответствует мода **б** на рисунке 7

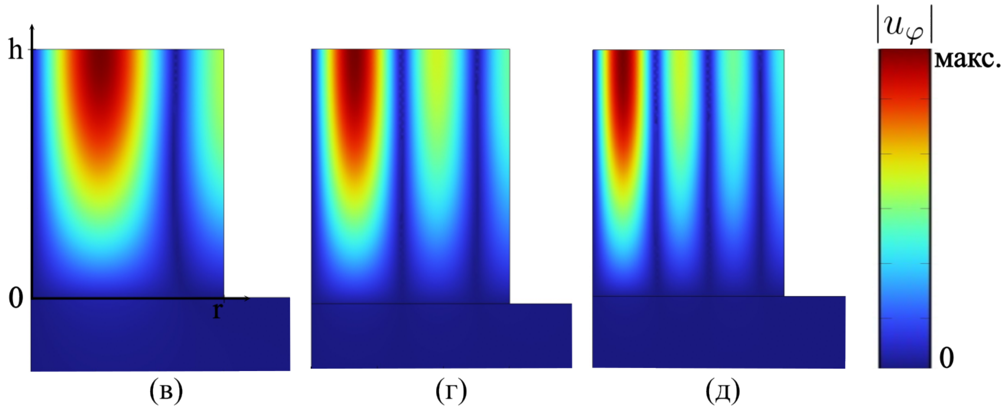

Рисунок 9 – На графике представлено поле модуля смещений для ϕ - моды. Высота цилиндра $h = 4$ м, радиус $r = 3$ м. Графику (в) соответствует мода **в** на рисунке 7. Графику (г) соответствует мода **г** на рисунке 7. Графику (д) соответствует мода **д** на рисунке 7

Также были найдены высокодобротные ρz-моды (рисунок 10), соответствующие (рисунок 6) модам из приближенной модели (A). На

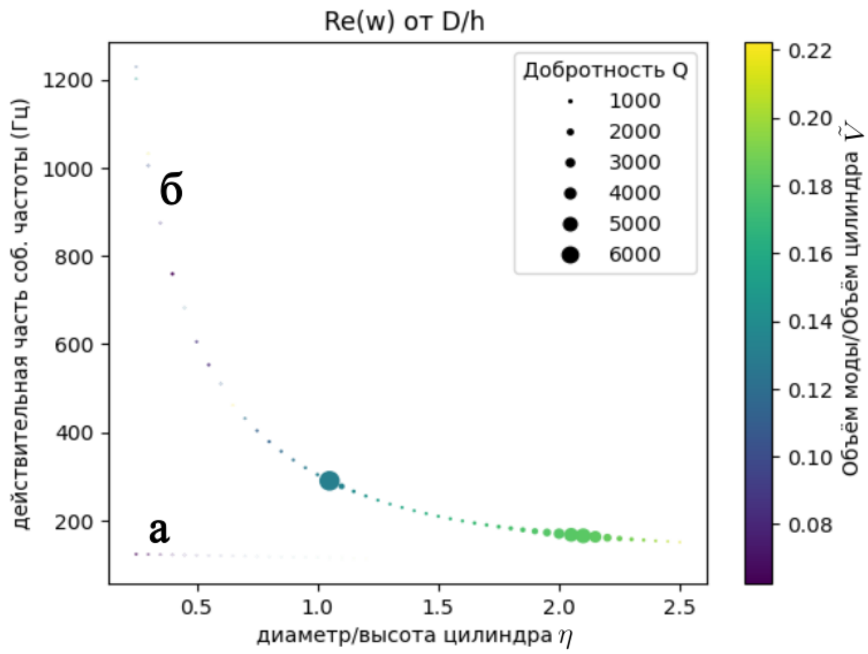

Рисунок 10 – График зависимости действительной части частоты от геометрической характеристики цилиндра $\eta = \frac{D}{h}$. Цветом показано отношение объёма моды к объёму цилиндра. Площадь, занимаемая каждой точкой, пропорциональна её добротности (2) (рисунке 11) представлен модуль поля смещения для а и б мод, соответственно. Также видна деформация цилиндра для данных мод. Ветка б совпала с полученной экспериментально в работе [7], именно для воспроизведения и последующего улучшения результатов были выбраны такие материалы: золото и сапфир. Вдоль ветки б заметны колебания добротности (рисунок 12).

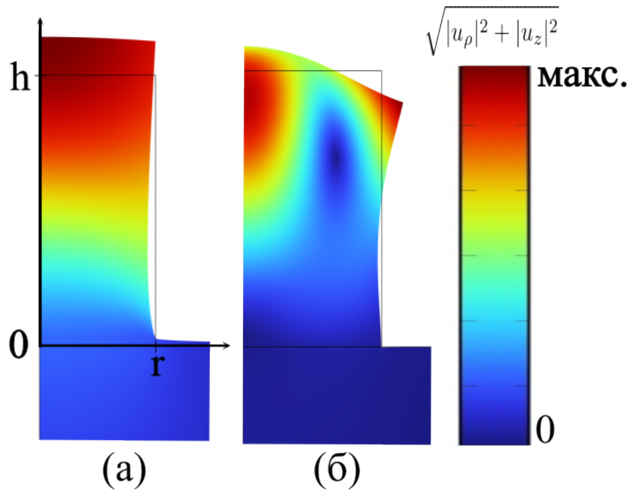

Рисунок 11 – На графике представлено поле модуля смещений для ρz - моды и вид деформации. Высота цилиндра $h = 4$ м, радиус $r = 3$ м. Графику (а) соответствует мода **а** на рисунке 10. Графику (б) соответствует мода **б** на рисунке 10

Наблюдается 4 локальных пика, для подобного поведения найдено объяснение. А именно, основные колебания б моды сосредоточены в вершине цилиндра (рисунок 11 б), для этого была сделана засветка колебаний в б моде, чтобы продемонстрировать стоячую волну вдоль оси z (рисунок 13). Если узел стоячей волны приходится на основание цилиндра, то наблюдается локальный пик добротности. В данном диапазоне варьирования геометрической характеристики цилиндра η укладывается 4 узла стоячей волны.

При сравнении ϕ - мод (рисунок 10) с ρz - модами (рисунок 7) наблюдается, что добротность вращательных мод на порядок превосходит добротность ρz - мод, это согласуется с тем, что центр масс цилиндра во время крутильных колебаний покоится, а при ρz колебаниях покоится лишь для определённого типа мод. Следовательно благодаря верному аналитическому приближению нами были численно найдены все наиболее высокодобротные моды системы.

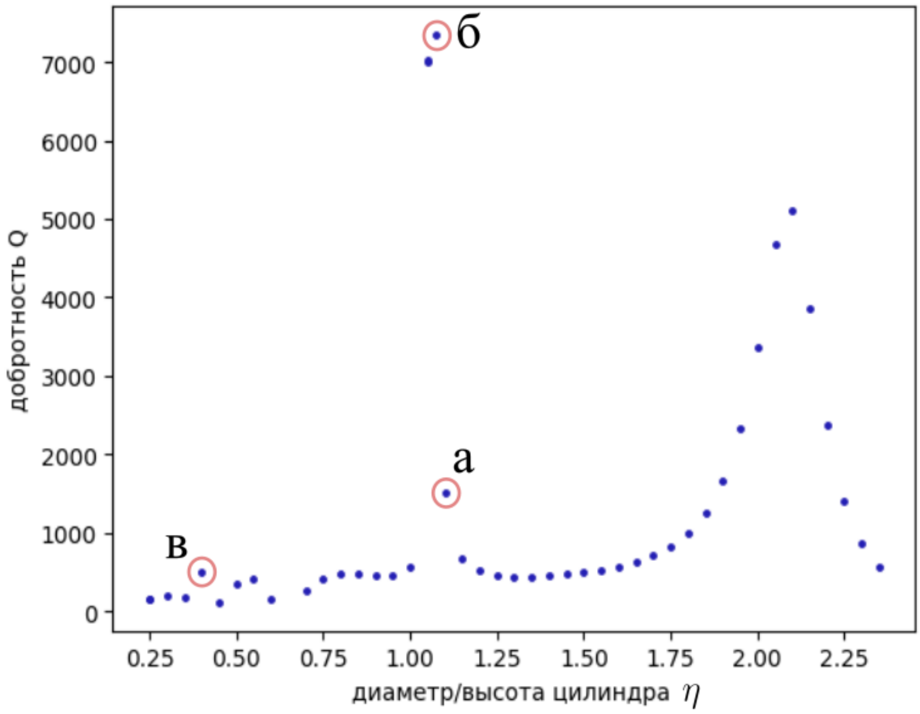

Рисунок 12 – График зависимости добротности от геометрической характеристики цилиндра $\eta = \frac{D}{h}$, где D диаметр, h высота цилиндра. Наблюдаются 4 пика при $\eta = 0.40, 0.55, 1.10, 2.10$

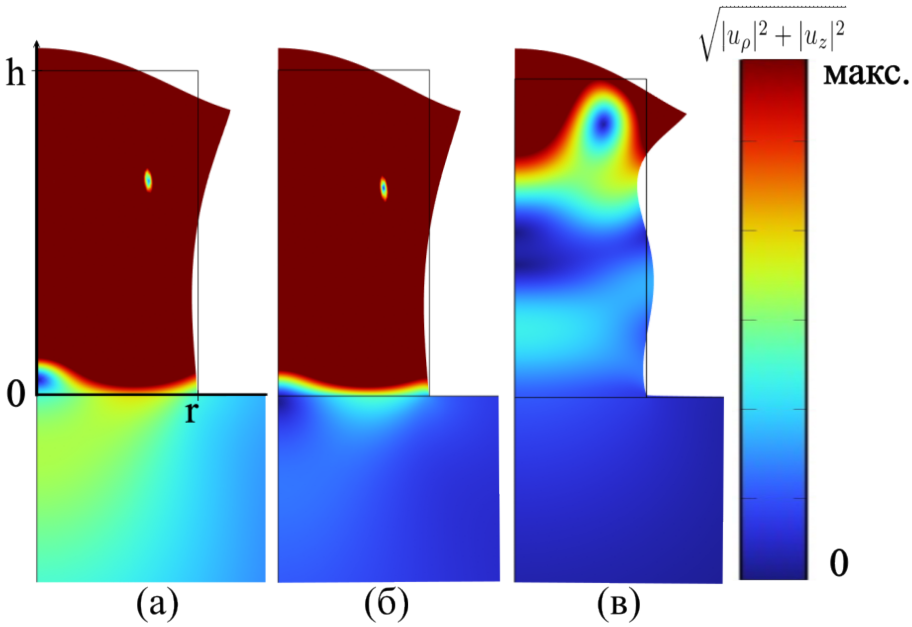

Рисунок 13 – На графике представлен модуль поля смещений для **б** - моды на рисунке 10. Графику (а) соответствует $\eta = 1.10$, графику (б) соответствует $\eta = 1.05$, графику (в) соответствует $\eta = 0.40$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной работы были проведены исследования собственных мод упругих колебаний цилиндрического резонатора, расположенного на упругой подложке - на полупространстве, поддерживающем распространение упругих волн. Проведены аналитические и численные расчеты и обнаружено появление высокодобротных мод, локализованных внутри цилиндрического резонатора. Были получены следующие результаты:

— были найдены собственные моды упругого изолированного цилиндрического резонатора. Были найдены аналитические выражения для собственных частот и собственных мод векторов, смещения которых имеют ненулевой лишь азимутальную компоненту смещения (крутильные, торсионные моды). Полученные выражения полностью совпали с результатами численных расчетов,
— с помощью методов численного моделирования были найдены собственные моды цилиндрического резонатора, расположенного на подложке и найдены высокодобротные моды. Были получены следующие результаты:
    а) показано, что высокая добротность мод связана с подавленным излучение упругих волн в подложку,
    б) найдена зависимость добротности от геометрического параметра отношения высоты цилиндра к диаметру, и установлены значения геометрического параметра обеспечивающего максимальную добротность,
    в) были исследованы наиболее высокодобротные моды и показано, что они полностью соответствуют модам изолированного цилиндра с нулевыми граничными условиями первого рода на границе соприкосновения цилиндра и подложки.

Представленные результаты нужны для понимания природы акустических колебаний в упругих нанорезонаторах, что может быть применено в создании эффективных моделей оптоакустического возбуждения объёмных и поверхностных волн.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Балакший В. И., Парыгин В. Н., Чирков Л. Е. Физические основы акустооптики. — Радио и связь, 1985.
2. Nanoantenna for electrical generation of surface plasmon polaritons / F. Bigourdan [и др.] // Physical review letters. — 2016. — Т. 116, № 10. — С. 106803.
3. Nonradiating photonics with resonant dielectric nanostructures / K. Koshelev [и др.] // Nanophotonics. — 2019. — Т. 8, № 5. — С. 725–745.
4. Dijk M. A. van, Lippitz M., Orrit M. Detection of acoustic oscillations of single gold nanospheres by time-resolved interferometry // Physical review letters. — 2005. — Т. 95, № 26. — С. 267406.
5. Determination of nanoscale mechanical properties of polymers via plasmonic nanoantennas / H. D. Boggiano [и др.] // ACS Photonics. — 2020. — Т. 7, № 6. — С. 1403–1409.
6. Opto-thermally controlled beam steering in nonlinear all-dielectric metastructures / D. Rocco [и др.] // Optics Express. — 2021. — Т. 29, № 23. — С. 37128–37139.
7. Controlling the quality factor of a single acoustic nanoresonator by tuning its morphology / F. Medeghini [и др.] // Nano letters. — 2018. — Т. 18, № 8. — С. 5159–5166.
8. Mercadé L., Barreda Á., Martínez A. Dispersive optomechanics of supercavity modes in high-index disks // Optics Letters. — 2020. — Т. 45, № 18. — С. 5238–5241.
9. Maier S. A. Plasmonics: Fundamentals and Applications. — Springer Science+Business Media LLC, 2007. — ISBN 978-0387-33150-8.
10. High-Q supercavity modes in subwavelength dielectric resonators / M. V. Rybin [и др.] // Physical review letters. — 2017. — Т. 119, № 24. — С. 243901.
11. Bound states in the continuum / C. W. Hsu [и др.] // Nature Reviews Materials. — 2016. — Т. 1, № 9. — С. 1–13.
12. Overvig A., Yu N., Alù A. Chiral quasi-bound states in the continuum // Physical Review Letters. — 2021. — Т. 126, № 7. — С. 073001.

13. Bound states in the continuum in compact acoustic resonators / I. Deriy [и др.] // Physical Review Letters. — 2022. — Т. 128, № 8. — С. 084301.

14. Acoustic far-field hypersonic surface wave detection with single plasmonic nanoantennas / R. Berte [и др.] // Physical Review Letters. — 2018. — Т. 121, № 25. — С. 253902.

15. Dipole states and coherent interaction in surface-acoustic-wave coupled phononic resonators / L. Raguin [и др.] // Nature communications. — 2019. — Т. 10, № 1. — С. 4583.

16. Single-particle vibrational spectroscopy using optical microresonators / S.-J. Tang [и др.] // arXiv preprint arXiv:2305.13587. — 2023.

17. Barizuddin S., Bok S., Gangopadhyay S. Plasmonic sensors for disease detection-a review // J. Nanomed. Nanotechnol. — 2016. — Т. 7, № 3. — С. 1000373.

18. Ultrahigh-frequency surface acoustic wave sensors with giant mass-loading effects on electrodes / Z. Chen [и др.] // ACS sensors. — 2020. — Т. 5, № 6. — С. 1657–1664.

19. Agostini M., Greco G., Cecchini M. A Rayleigh surface acoustic wave (R-SAW) resonator biosensor based on positive and negative reflectors with sub-nanomolar limit of detection // Sensors and Actuators B: Chemical. — 2018. — Т. 254. — С. 1–7.

20. Länge K. Bulk and surface acoustic wave sensor arrays for multi-analyte detection: A review // Sensors. — 2019. — Т. 19, № 24. — С. 5382.

21. Zemanek Jr J. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // The Journal of the Acoustical society of America. — 1972. — Т. 51, 1B. — С. 265–283.

22. Chau K. T. Vibrations of transversely isotropic finite circular cylinders. — 1994.

23. Lusher C., Hardy W. Axisymmetric free vibrations of a transversely isotropic finite cylindrical rod. — 1988.

24. Williams E. G., Mann III J. A. Fourier acoustics: sound radiation and nearfield acoustical holography. — 2000.

25. Olver F. W. Asymptotics and Special Functions (Akp Classics) (2nd Edition). — Academic Press, New York, 1997. — ISBN 978-1568810690.

26. М.А.Исакович. Общая акустика. — Издательство ’’Наука’’, 1973.

27. Response of seven crystallographic orientations of sapphire crystals to shock stresses of 16–86 GPa / G. Kanel [и др.] // Journal of Applied Physics. — 2009. — Т. 106, № 4. — С. 043524.