

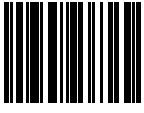
**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University**

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
GRADUATION THESIS**

**Квазисвязанные состояния в континууме и исключительные точки в открытых
акустических резонаторах**

Обучающийся / Student Игошин Владимир Дмитриевич
Факультет/институт/кластер/ Faculty/Institute/Cluster физический факультет
Группа/Group Z34434
Направление подготовки/ Subject area 16.03.01 Техническая физика
Образовательная программа / Educational program Техническая физика 2019
Язык реализации ОП / Language of the educational program Русский
Статус ОП / Status of educational program
Квалификация/ Degree level Бакалавр
Руководитель ВКР/ Thesis supervisor Фризюк Кристина Сергеевна, кандидат физико-математических наук, Университет ИТМО, физический факультет, младший научный сотрудник

Обучающийся/Student


Документ подписан	
Игошин Владимир Дмитриевич	
31.05.2023	

(эл. подпись / signature)

Игошин
Владимир
Дмитриевич

(Фамилия И.О./ name
and surname)

Руководитель ВКР/
Thesis supervisor

Документ подписан	
Фризюк Кристина Сергеевна	
31.05.2023	

(эл. подпись / signature)

Фризюк
Кристина
Сергеевна

(Фамилия И.О./ name
and surname)

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University

ЗАДАНИЕ НА ВЫПУСКНУЮ КВАЛИФИКАЦИОННУЮ РАБОТУ /
OBJECTIVES FOR A GRADUATION THESIS

Обучающийся / Student Игошин Владимир Дмитриевич

Факультет/институт/кластер/ Faculty/Institute/Cluster физический факультет
Группа/Group Z34434

Направление подготовки/ Subject area 16.03.01 Техническая физика

Образовательная программа / Educational program Техническая физика 2019

Язык реализации ОП / Language of the educational program Русский

Статус ОП / Status of educational program

Квалификация/ Degree level Бакалавр

Тема ВКР/ Thesis topic Квазисвязанные состояния в континууме и исключительные точки в открытых акустических резонаторах

Руководитель ВКР/ Thesis supervisor Фризюк Кристина Сергеевна, кандидат физико-математических наук, Университет ИТМО, физический факультет, младший научный сотрудник

Основные вопросы, подлежащие разработке / Key issues to be analyzed

Техническое задание и исходные данные к работе:

Классификация собственных мод резонаторов по неприводимым представлениям. Определение собственных частот одиночных открытых акустических резонаторов различных симметрий при помощи среды численного моделирования COMSOL Multiphysics. Построение кривых зависимости собственных частот резонатора от его высоты для резонаторов симметрии цилиндра, конуса, пирамиды с квадратным и прямоугольным основанием. Анализ поведения кривых зависимости собственных частот от его высоты при нарушении симметрии резонатора. Построение теоретической модели для описания поведения собственных частот резонатора вблизи исключительной точки в приближении двухуровневой системы. Подбор параметра нарушения симметрии системы, при котором наблюдается исключительная точка.

Перечень подлежащих разработке вопросов:

1. Обзор литературы
2. Уравнения линейной акустики. Собственные частоты открытого акустического резонатора.
3. Классификация собственных мод по неприводимым представлениям
4. Образование исключительной точки при нарушении симметрии системы
5. Эффективная теоретическая модель взаимодействия мод

Исходные материалы и пособия:

A. Zee, Group Theory in a Nutshell for Physicists (Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 2016);

M. S. Dresselhaus, Group Theory: Application to the Physics of Condensed Matter (Springer, Berlin, Germany, 2008);
 I. Deriy et al., Bound States in the Continuum in Compact Acoustic Resonators, Phys. Rev. Lett., vol. 128, no. 8, 23 Feb. 2022;
 M. B. Doost, W. Langbein, and E. A. Muljarov, Resonant-state expansion applied to three-dimensional open optical systems, Phys. Rev. A 90, 013834 (2014);
 Earl G Williams, Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography (Elsevier Science, 1999);
 A. Bogdanov et al., Bound states in the continuum and Fano resonances in the strong mode coupling regime, Advanced Photonics, Vol. 1, Issue 1 (2019);
 N. Moiseyev, Non-Hermitian Quantum Mechanics (Cambridge University Press, Cambridge, England, UK, 2011);
 J. Wiersig, Sensors operating at exceptional points: General theory, Phys. Rev. A 93, 033809 (2016);
 M.-A. Miri and A. Al`u, Exceptional points in optics and photonics, Science 363, eaar7709 (2019).

Дата выдачи задания / Assignment issued on: 15.01.2023

Срок представления готовой ВКР / Deadline for final edition of the thesis 20.05.2023

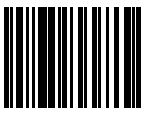
Характеристика темы ВКР / Description of thesis subject (topic)

Тема в области фундаментальных исследований / Subject of fundamental research: да / yes

Тема в области прикладных исследований / Subject of applied research: нет / not

СОГЛАСОВАНО / AGREED:

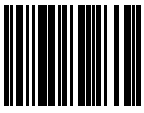
Руководитель ВКР/
Thesis supervisor

Документ подписан	
Фризюк Кристина Сергеевна	
03.03.2023	

Фризюк
Кристина
Сергеевна

(эл. подпись)

Задание принял к
исполнению/ Objectives
assumed BY

Документ подписан	
Игошин Владимир Дмитриевич	
03.03.2023	

Игошин
Владимир
Дмитриевич

(эл. подпись)

Руководитель ОП/ Head
of educational program

Документ подписан	
Белов Павел Александрович	
18.05.2023	

Белов Павел
Александрович

(эл. подпись)

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University**

**АННОТАЦИЯ
ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
SUMMARY OF A GRADUATION THESIS**

Обучающийся / Student Игошин Владимир Дмитриевич
Факультет/институт/кластер/ Faculty/Institute/Cluster физический факультет
Группа/Group Z34434
Направление подготовки/ Subject area 16.03.01 Техническая физика
Образовательная программа / Educational program Техническая физика 2019
Язык реализации ОП / Language of the educational program Русский
Статус ОП / Status of educational program
Квалификация/ Degree level Бакалавр
Тема ВКР/ Thesis topic Квазисвязанные состояния в континууме и исключительные точки в открытых акустических резонаторах
Руководитель ВКР/ Thesis supervisor Фризюк Кристина Сергеевна, кандидат физико-математических наук, Университет ИТМО, физический факультет, младший научный сотрудник

**ХАРАКТЕРИСТИКА ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
DESCRIPTION OF THE GRADUATION THESIS**

Цель исследования / Research goal

Обобщение механизмов получения исключительных точек и квазисвязанных состояний в континууме в открытом компактном акустическом резонаторе при помощи теоретико-групповых методов

Задачи, решаемые в ВКР / Research tasks

1) Теоретико-групповой анализ зависимостей собственных мод системы от ее геометрических параметров, 2) получение квазисвязанных состояний в континууме (КССК) по механизму Фридриха–Винтгена в открытом компактном акустическом резонаторе, 3) описание общего подхода к получению исключительных точек (ИТ) в резонаторе любой точечной или предельной точечной группы симметрии, 4) создание и проверка феноменологической модели, описывающей поведение собственных частот резонатора вблизи ИТ.

Краткая характеристика полученных результатов / Short summary of results/findings

Продемонстрировано КССК в открытом компактном акустическом резонаторе. Показано, что возникновение КССК по механизму Фридриха–Винтгена связано со свойствами симметрии собственных мод открытого резонатора, а не с его формой. Описан и продемонстрирован общий подход к получению ИТ в открытом компактном акустическом резонаторе любой группы симметрии. Предложена и проверена феноменологическая модель поведения собственных частот резонатора вблизи ИТ, основанная на разложении по резонансным состояниям.

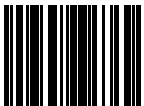
Наличие публикаций по теме выпускной работы / Publications on the topic of the thesis

1. Tsimokha M., Igoshin V., Nikitina A., Toftul I., Frizyuk K., Petrov M. Acoustic resonators: Symmetry classification and multipolar content of the eigenmodes//Physical Review B, 2022, Vol. 105, No. 16, pp. 165311 (Статья; Scopus, Web of Science)
2. Игошин В.Д., Никитина А.Д., Цимоха М.А., Тофтул И.Д., Петров М.И., Фризюк К.С. Механизм образования исключительных точек при нарушении симметрии резонатора - 2022 (Тезисы)
3. Igoshin V., Nikitina A., Tsimokha M., Toftul I., Petrov M., Frizyuk K. High-Q states in acoustic apple-shaped resonators//Journal of Physics: Conference Series, 2021, Vol. 2015, No. 1, pp. 012040 (Статья; Scopus, Web of Science)

Наличие выступлений на конференциях по теме выпускной работы / Conference reports on the topic of the thesis

1. XXXV сессия Российского акустического общества, 13.02.2023 - 17.02.2023 (Конференция, статус - всероссийский)
2. XV Российская конференция по физике полупроводников, 03.10.2022 - 07.10.2022 (Конференция, статус - всероссийский)

Обучающийся/Student

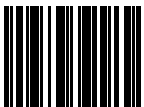
Документ подписан	
Игошин Владимир Дмитриевич	
31.05.2023	

(эл. подпись/ signature)

Игошин
Владимир
Дмитриевич

(Фамилия И.О./ name
and surname)

Руководитель ВКР/
Thesis supervisor

Документ подписан	
Фризюк Кристина Сергеевна	
31.05.2023	

(эл. подпись/ signature)

Фризюк
Кристина
Сергеевна

(Фамилия И.О./ name
and surname)

СОДЕРЖАНИЕ

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ.....	7
ВВЕДЕНИЕ	8
1 Теоретическое введение в линейную акустику и теорию представлений.....	10
1.1 Уравнения звуковых волн	10
1.2 Классификация собственных мод по неприводимым представлениям	13
1.2.1 Некоторые сведения из теории представлений групп	13
1.2.2 Группа симметрии уравнения.....	13
1.2.3 Классификация собственных мод резонатора.....	16
1.3 Рассеяние Ми	18
2 Связанные и квазисвязанные состояния в континууме	23
2.1 Теорема о несуществовании связанного состояния в континууме	23
2.2 Механизм Фридриха–Винтгена.....	24
2.3 Результаты моделирования	25
3 Исключительные точки	30
3.1 Исключительные точки.....	30
3.2 Переход от антипересечения к пересечению при нарушении симметрии системы	32
3.3 Пример исключительной точки.....	35
3.4 Модель собственных частот в окрестности исключительной точки	36
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	40
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	41

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ИТ — исключительная точка

КССК — квазисвязанное состояние в континууме

ССК — связанное состояние в континууме

PML — идеально согласованный слой (от англ. perfectly matched layer)

SBC — граничное условие излучения рассеяния (от англ. scattering boundary condition)

ВВЕДЕНИЕ

Акустические метаматериалы позволяют создать структуры, обладающие свойствами, которые не встречаются в природе, например, нулевыми или отрицательными показателями преломления или определенной направленностью отражённой волны [1; 2]. Акустические метаматериалы состоят из метаатомов, в роли которых могут выступать одиночные резонаторы. Такой способ создания метаповерхностей зарекомендовал себя не только в оптике и фотонике [3; 4], но и в акустике [5]. Работа посвящена открытым компактным акустическим резонаторам, а именно свойствам их спектров, которые являются одной из важнейших характеристик любого резонатора.

Одно из явлений, которые можно наблюдать в спектре открытой системы — появление связанного состояния в континууме (ССК). Это такое состояние системы, которое имеет энергию, лежащую в области непрерывного спектра системы (континуума), но при этом не взаимодействует с модами этого континуума [6; 7]. Существует множество механизмов получения ССК, различные реализации этих механизмов были предложены в оптике и акустике [6–11]. Квазисвязанные состояния в континууме (КССК), которые, в отличие от ССК, обладают конечной добротностью, были получены в компактных открытых диэлектрических резонаторах [12], однако КССК в подобных акустических системах продемонстрировано не было.

Еще одна особенность, которую можно наблюдать при изучении спектра системы — исключительные точки. Исключительные точки (ИТ) — это точки в пространстве параметров системы, в которых вырождаются собственные числа и соответствующие им собственные векторы [13; 14]. Спектр системы в области ИТ очень чувствителен к изменению параметров системы, что можно использовать для создания высокочувствительных сенсоров [15; 16]. ИТ могут возникать только в неэрмитовых системах [17] и часто упоминаются в контексте РТ-симметричных систем (от англ. parity–time) [14; 18]. ИТ в РТ-симметричных системах были продемонстрированы в электронике [19], оптике [13], акустике [20; 21]. РТ-симметричные системы являются лишь частным случаем неэрмитовых систем, другим частным случаем неэрмитовых систем являются открытые компактные резонаторы, которым посвящена работа.

В работе [22] описано получение ИТ путем нарушения симметрии компактного оптического диэлектрического резонатора, однако в ней не было дано общего рецепта получения ИТ в резонаторах симметрии, отличной от цилиндрической.

Цель работы — обобщение механизмов получения ИТ и КССК в открытом компактном акустическом резонаторе при помощи теоретико-групповых методов. В соответствие с поставленной целью были сформулированы следующие задачи:

- а) теоретико-групповой анализ зависимостей собственных частот системы от ее геометрических параметров,
- б) получение КССК по механизму Фридриха–Винтгена в открытом компактном акустическом резонаторе,
- в) описание общего подхода к получению ИТ в резонаторе любой точечной или предельной точечной группы симметрии,
- г) создание и проверка феноменологической модели, описывающей поведение собственных частот резонатора вблизи ИТ.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНУЮ АКУСТИКУ И ТЕОРИЮ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

1.1 Уравнения звуковых волн

В работе рассматривается система, представляющая собой компактный открытый акустический резонатор, то есть резонатор, окруженный неограниченной средой. Среда и резонатор жидкие или воздушные, поэтому в них распространяются только продольные акустические волны. Материалы среды и резонатора изотропные и не имеют потерь.

В приближении малых колебаний в звуковой волне уравнение Эйлера можно свести к уравнению

$$\rho(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla p(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ — скорость в звуковой волне, $p(\mathbf{r}, t)$ — давление в звуковой волне, $\rho(\mathbf{r})$ — плотность среды, $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ — внешняя сила, действующая на единицу объема. Уравнение непрерывности в этом приближении сводится к уравнению

$$\beta(\mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2)$$

где $\beta(\mathbf{r})$ — сжимаемость среды. В этом приближении при разложении колебаний учитываются только линейные поправки, поэтому эти уравнения называют уравнениями линейной акустики [23]. Другое название — уравнения звуковых волн [24]. Скорость звуковой волны определяется выражением $c = 1/\sqrt{\rho\beta}$, волновой вектор имеет вид $k = \omega/c$.

Здесь и далее множество точек пространства, лежащих внутри резонатора, обозначается Ω , а множество точек границы резонатора — $\partial\Omega$ (рисунок 1). На границе резонатора выполняются условия равенства давлений и равенства нормальных к поверхности резонатора $\partial\Omega$ компонент скорости

$$p_{\text{in}}|_{\partial\Omega} = p_{\text{out}}|_{\partial\Omega}, \quad (3)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{\text{in}}|_{\partial\Omega} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{\text{out}}|_{\partial\Omega}, \quad (4)$$

где индекс in соответствует давлению и скорости внутри резонатора, out — в окружающей резонатор среде, \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности [24].

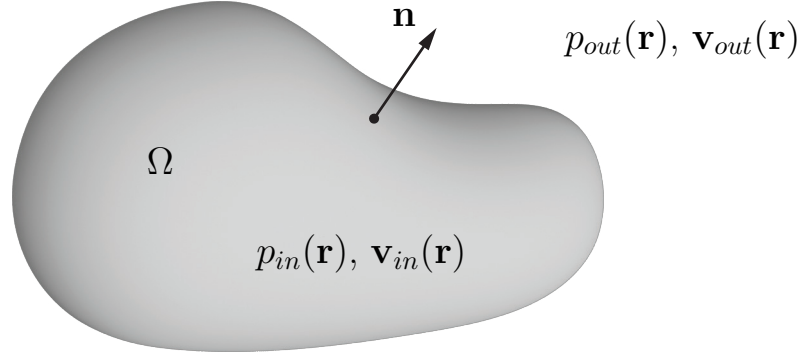


Рисунок 1 – Геометрия системы. Акустический резонатор в изотропной среде. Ω — множество точек, лежащих внутри резонатора, \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности резонатора в одной из точек его поверхности, p_{in} , p_{out} — давление внутри и снаружи резонатора, \mathbf{v}_{in} , \mathbf{v}_{out} — скорость внутри и снаружи резонатора

Используя анзац гармонических колебаний $p, \mathbf{v} \propto e^{-i\omega t}$, уравнения (1) и (2) вне резонатора и источников (вне области действия внешних сил) можно переписать в виде уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0. \quad (5)$$

Для уравнения Гельмгольца условие открытости резонатора, то есть окруженности резонатора неограниченной средой, накладывает условие на поведение давления $p(\mathbf{r})$ на бесконечном удалении от резонатора

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial}{\partial r} - ikr \right) p(\mathbf{r}) = 0. \quad (6)$$

Это условие называется условием Зоммерфельда на поле излучения. Оно ограничивает решения уравнения Гельмгольца расходящимися сферическими волнами [25; 26]. Именно это условие делает задачу неэрмитовой [27].

Уравнения (1) и (2) можно переписать в виде

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\nabla \cdot \\ \nabla & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbb{D}}(\mathbf{r})} \begin{pmatrix} p \\ i\mathbf{v} \end{pmatrix} = \omega \underbrace{\begin{pmatrix} \beta(\mathbf{r}) & 0 \\ 0 & \rho(\mathbf{r}) \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbb{P}}(\mathbf{r})} \begin{pmatrix} p \\ i\mathbf{v} \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{f} \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbb{J}}(\mathbf{r})}. \quad (7)$$

В отсутствие источников получаемая обобщенная задача на собственные значения

$$\hat{\mathbb{D}}(\mathbf{r})\vec{\mathbb{F}}_n(\mathbf{r}) = \omega_n\hat{\mathbb{P}}(\mathbf{r})\vec{\mathbb{F}}_n(\mathbf{r}) \quad (8)$$

повторяет форму, используемую в схожей оптической системе, состоящей из компактного резонатора в изотропном окружающем пространстве, описываемой уравнениями Максвелла [28]. Решая эту задачу, можно найти собственные числа ω_n и соответствующие им собственные моды системы $\vec{\mathbb{F}}_n$.

Одним из следствий неэрмитовости является тот факт, что собственные частоты системы не обязаны быть вещественными. В случае комплексной частоты $p, \mathbf{v} \propto e^{-i\text{Re}\{\omega\}t}e^{\text{Im}\{\omega\}t}$, то есть амплитуда собственных мод системы меняется со временем. Характеризовать эти изменения позволяет понятие добротности. Добротность собственной моды определяет отношение запасенной в системе энергии к потерям за один период [29]. Зависящая от времени часть амплитуды собственной моды A пропорциональна $e^{-i\omega t}$, тогда энергия W , запасенная в системе [24]

$$W \propto A^*A \propto (e^{-i\omega t})^* e^{-i\omega t} = e^{i\text{Re}\{\omega\}t}e^{\text{Im}\{\omega\}t}e^{-i\text{Re}\{\omega\}t}e^{\text{Im}\{\omega\}t} = e^{2\text{Im}\{\omega\}t}. \quad (9)$$

Относительные потери энергии в таком случае равны

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} \propto \frac{1}{W} 2\text{Im}\{\omega\}W = 2\text{Im}\{\omega\}. \quad (10)$$

Отсюда следует, что мнимая часть частоты определяет то, как быстро затухают колебания в резонаторе из-за потерь энергии на излучение (считаем, что нет потерь в материалах). Условие того, что энергия системы должна уменьшаться со временем, определяет знак мнимой части частоты $\text{Im}\{\omega\} < 0$. Период обратно пропорционален вещественной части частоты $\text{Re}\{\omega\}$, поэтому для собственных мод с комплексной частотой ω добротность Q можно определить, используя формулу [29]

$$Q = \frac{\text{Re}\{\omega\}}{2|\text{Im}\{\omega\}|}. \quad (11)$$

1.2 Классификация собственных мод по неприводимым представлениям

1.2.1 Некоторые сведения из теории представлений групп

Пусть некоторая совокупность объектов $\{g_i\}_{i=0}^m$ образует группу G . Этими объектами, в частности, могут быть операции вращения и инверсия трехмерного пространства [30]. Преобразования координат, при которых акустический резонатор переходит сам в себя, образуют группу симметрии этого резонатора. Именно такие группы рассмотрены в работе.

Если существует гомоморфизм из группы G в группу T линейных операторов \hat{T}_{g_i} , которые действуют в некотором пространстве R , то группа T образует линейное представление группы G . Рассмотрим набор векторов $\{\Psi_j\}_{j=1}^n$, который является базисом пространства R^n . Говорят, что Ψ_j преобразуются по представлению группы, если под действием преобразований из группы G они переходят в линейную комбинацию самих себя [31]

$$\hat{T}_{g_i} \Psi_j = \sum_{k=1}^n D_{kj}(g_i) \Psi_k = D(g_i) \Psi_j, \quad (12)$$

где $D(g_i)$ — матрица, которая соответствует элементу g_i группы G . Матрицы $D(g_i)$ также образуют представление D группы G , а векторы Ψ_j образуют базис этого представления.

Представление D называется неприводимым, если из пространства R^n нельзя выделить подпространство R^k , инвариантное относительно всех преобразований представления, то есть такое, что для любых $g_i \in G$ и любых $\Psi_j \in R^k$ верно, что $D(g_i) \Psi_j \in R^k$ [30].

1.2.2 Группа симметрии уравнения

Уравнение инвариантно относительно преобразования g_i , если оно не меняет вид при этом преобразовании [30]. Условием инвариантности стационарного уравнения Шредингера

$$\hat{H}(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}) \quad (13)$$

относительно группы G является условие коммутативности гамильтониана с операторами \hat{T}_{g_i} [30]

$$\hat{H} \hat{T}_{g_i} = \hat{T}_{g_i} \hat{H}. \quad (14)$$

Вводя коммутатор [32]

$$[X, Y] = XY - YX \quad (15)$$

условие (14) можно переписать

$$[\hat{T}_{g_i}, \hat{H}] = 0. \quad (16)$$

Используемые в работе теоремы и свойства изначально были получены в терминах квантовой механики и стационарного уравнения Шредингера, однако не имеет значения, какая именно задача на собственные числа решается, поэтому эти теоремы и свойства могут быть применены к акустике. Применим условие (16) к уравнению акустики (8), предварительно домножив уравнение на $\hat{\mathbb{P}}^{-1}$ (индекс собственных мод и частот опущен)

$$\hat{\mathbb{P}}^{-1} \hat{\mathbb{D}} \vec{\mathbb{F}} = \omega \vec{\mathbb{F}}. \quad (17)$$

Условие инвариантности (16) принимает вид

$$[\hat{T}_{g_i}, \hat{\mathbb{P}}^{-1} \hat{\mathbb{D}}] = [\hat{T}_{g_i}, \hat{\mathbb{P}}^{-1}] \hat{\mathbb{D}} + \hat{\mathbb{P}}^{-1} [\hat{T}_{g_i}, \hat{\mathbb{D}}] = 0. \quad (18)$$

Для раскрытия коммутатора применялось одно из свойств коммутатора, которое называется правилом Лейбница [32]. Один из способов удовлетворить условию инвариантности — обнуление каждого из коммутаторов в сумме.

Рассмотрим ортогональное преобразование координат \hat{O} в трехмерном пространстве, которому соответствует оператор \hat{T}_O . К таким преобразованиям относятся вращения, инверсии и их комбинации — отражения системы [31]. Для скалярных функций, например, давления, используя условие ортогональности $\hat{O}^{-1} = \hat{O}^T$, действие оператора можно свести к замене аргумента [30]

$$\hat{T}_O p(\mathbf{r}) = p(\hat{O}^{-1} \mathbf{r}) = p(\hat{O}^T \mathbf{r}). \quad (19)$$

В этой работе рассматриваются трехмерные резонаторы, инвариантные относительно преобразований различных групп симметрии. Это отражается в том, что плотность $\rho(\mathbf{r})$ и сжимаемость $\beta(\mathbf{r})$ не меняются при преобразованиях группы

$$\rho(\hat{O}^T \mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}), \quad \beta(\hat{O}^T \mathbf{r}) = \beta(\mathbf{r}). \quad (20)$$

Поэтому оператор $\hat{\mathbb{P}}(\mathbf{r})$ и обратный к нему

$$\hat{\mathbb{P}}^{-1}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta(\mathbf{r})} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho(\mathbf{r})} \end{pmatrix} \quad (21)$$

не меняются при преобразовании симметрии из группы симметрии резонатора, откуда следует, что $[\hat{T}_O, \hat{\mathbb{P}}^{-1}] = 0$.

Покажем, что $[\hat{T}_O, \hat{\mathbb{D}}] = 0$. Для векторной функции, например скорости, [33]

$$\hat{T}_O \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \hat{O} \mathbf{v}(\hat{O}^T \mathbf{r}). \quad (22)$$

Распишем $\hat{T}_O \hat{\mathbb{D}} \vec{\mathbb{F}}$

$$\begin{aligned} \hat{T}_O \hat{\mathbb{D}} \vec{\mathbb{F}} &= \hat{T}_O \begin{pmatrix} 0 & -\nabla \cdot \\ \nabla & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(\mathbf{r}) \\ \mathbf{i} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \\ &= \hat{T}_O \begin{pmatrix} -\mathbf{i}(\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{r}) \\ (\nabla p)(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{i}(\nabla \cdot \mathbf{v})(\hat{O}^T \mathbf{r}) \\ \hat{O}(\nabla p)(\hat{O}^T \mathbf{r}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

С другой стороны

$$\hat{\mathbb{D}} \hat{T}_O \vec{\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla \cdot \\ \nabla & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(\hat{O}^T \mathbf{r}) \\ \mathbf{i} \hat{O} \mathbf{v}(\hat{O}^T \mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{i} \nabla \cdot \hat{O} \mathbf{v}(\hat{O}^T \mathbf{r}) \\ \nabla p(\hat{O}^T \mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Распишем каждую из компонент получившегося вектора отдельно

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \hat{O} \mathbf{v}(\hat{O}^T \mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial r_j} \hat{O}_{ji} v_i(\hat{O}^T \mathbf{r}) = \frac{\partial \hat{O}_{kl}^T r_l}{\partial r_j} \frac{\partial}{\partial \hat{O}_{kl}^T r_l} \hat{O}_{ji} v_i(\hat{O}^T \mathbf{r}) = \\ &= \hat{O}_{kj}^T \hat{O}_{ji} \frac{\partial}{\partial \hat{O}_{kl}^T r_l} v_i(\hat{O}^T \mathbf{r}) = \delta_{ki} \frac{\partial}{\partial \hat{O}_{kl}^T r_l} v_i(\hat{O}^T \mathbf{r}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \hat{O}_{il}^T r_l} v_i(\hat{O}^T \mathbf{r}) = (\nabla \cdot \mathbf{v})(\hat{O}^T \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \nabla p(\hat{O}^T \mathbf{r}) &= \mathbf{e}_j \frac{\partial}{\partial r_j} p(\hat{O}^T \mathbf{r}) = \mathbf{e}_j \frac{\partial \hat{O}_{kl}^T r_l}{\partial r_j} \frac{\partial}{\partial \hat{O}_{kl}^T r_l} p(\hat{O}^T \mathbf{r}) = \\ &= \mathbf{e}_j \hat{O}_{kj}^T \frac{\partial}{\partial \hat{O}_{kl}^T r_l} p(\hat{O}^T \mathbf{r}) = \mathbf{e}_j \hat{O}_{jk} \frac{\partial}{\partial \hat{O}_{kl}^T r_l} p(\hat{O}^T \mathbf{r}) = \hat{O}(\nabla p)(\hat{O}^T \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (26)$$

Получаем

$$\hat{\mathbb{D}}\hat{T}_O\vec{F} = \begin{pmatrix} -i(\nabla \cdot \mathbf{v})(\hat{O}^T \mathbf{r}) \\ \hat{O}(\nabla p)(\hat{O}^T \mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Поэтому, $\hat{T}_O\hat{\mathbb{D}}\vec{F} = \hat{\mathbb{D}}\hat{T}_O\vec{F}$ при любых ортогональных преобразованиях координат. Таким образом, уравнение (8) инвариантно относительно ортогональных преобразований координат в том случае, если резонатор (а, значит, и оператор $\hat{\mathbb{P}}$) инвариантен относительно этих преобразований.

1.2.3 Классификация собственных мод резонатора

В работе рассматриваются резонаторы, инвариантные относительно преобразований подгрупп группы ортогональных трехмерных преобразований $O(3)$: точечных групп и предельных точечных групп (групп Кюри) [30; 34; 35]. К точечным группам относятся, например, группа симметрии правильной четырехугольной пирамиды C_{4v} , группа симметрии треугольной пирамиды C_{3v} , группа симметрии треугольной призмы D_{3h} (рисунок 2) [36]. К

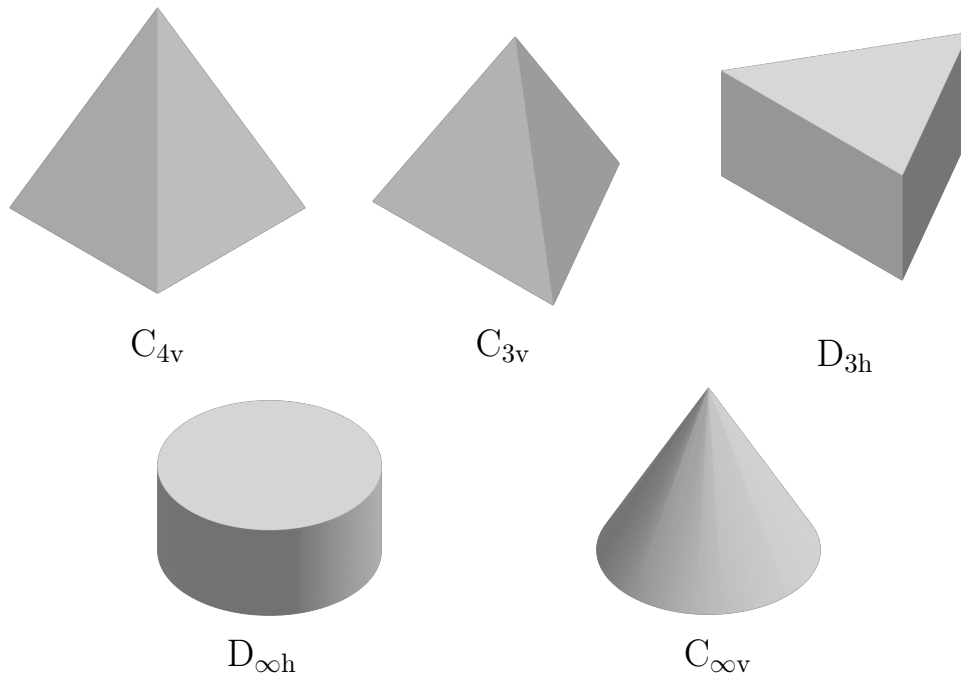


Рисунок 2 – Примеры резонаторов различных точечных и предельных точечных групп симметрии

предельным точечным группам относятся группы симметрии конуса $C_{\infty v}$ и цилиндра $D_{\infty h}$ (рисунок 2) [35].

Теорема Вигнера гласит, что собственные моды системы, соответствующие одному собственному значению (если нет случайного вырождения), преобразуются по одному из неприводимых представлений группы симметрии системы [30]. Из теоремы следует, что собственные моды системы могут быть классифицированы по неприводимым представлениям этой системы, а кратность вырождения этих мод совпадает с порядком неприводимого представления.

Классификации собственных мод оптических и акустических резонаторов, обладающих различной симметрией, были описаны в работах [37; 38]. Такая классификация может быть использована для создания основанных на акустических резонаторах устройств, которые обладают заданными свойствами [38]. Примеры такой классификации для резонаторов симметрии C_{4v} , C_{2v} , $C_{\infty v}$, $D_{\infty h}$, используемых в работе, приведены на рисунке 3 и рисунке 4. Примеры поля давления собственных мод на рисунке 3

а)			б)		
Пример моды	Непр. пред.	Сферические гармоники	Пример моды	Непр. пред.	Сферические гармоники
	A_1	e_{00} e_{10} e_{20} $Y_{el(4m)}$		A_1	e_{00} e_{10} e_{20} $Y_{el(2m)}$
	A_2	o_{44} o_{54} o_{64} $Y_{ol(4m)}$		A_2	o_{22} o_{32} o_{42} $Y_{ol(2m)}$
	B_1	e_{22} e_{32} e_{42} $Y_{el(4m-2)}$		B_1	o_{11} o_{31} o_{43} $Y_{ol(2m-1)}$
	B_2	o_{22} o_{32} o_{42} $Y_{ol(4m-2)}$		B_2	e_{11} e_{21} e_{31} $Y_{el(2m-1)}$
	E	e_{11} o_{11} e_{21} $Y_{el(2m-1)}$ $Y_{ol(2m-1)}$			

Рисунок 3 – Примеры классификации собственных мод акустических резонаторов симметрии C_{4v} (а) и C_{2v} (б). Приведены примеры распределений поля давления собственных мод резонаторов соответствующих симметрий, преобразующихся по разным неприводимым представлениям, а также мультиполи, которые преобразуются по этим же представлениям. Для каждого неприводимого представления выписана общая формула мультиполей, где $\ell \geq 0$, а m принимает такие целые значения, что третий индекс больше 0 и меньше или равен ℓ

и рисунке 4 получены при помощи моделирования в программном обеспечении COMSOL Multiphysics® с использованием модуля акустики жидкости и газа (Pressure acoustics). Для ускорения расчета моделировался закры-

а)			б)		
Пример моды	Непр. пред.	Сферические гармоники	Пример моды	Непр. пред.	Сферические гармоники
	A_{1u}	$\begin{matrix} \epsilon_{10} & \epsilon_{30} & \epsilon_{50} \\ Y_{e(2\ell-1)0} \end{matrix}$		A_1	$\begin{matrix} \epsilon_{00} & \epsilon_{10} & \epsilon_{20} \\ Y_{e\ell 0} \end{matrix}$
	A_{1g}	$\begin{matrix} \epsilon_{00} & \epsilon_{20} & \epsilon_{40} \\ Y_{e(2\ell)0} \end{matrix}$		E_1	$\begin{matrix} o_{11} & e_{11} & o_{21} \\ Y_{e\ell 1} \\ Y_{o\ell 1} \end{matrix}$
	E_{1u}	$\begin{matrix} o_{11} & e_{11} & o_{31} \\ Y_{e(2\ell-1)1} \\ Y_{o(2\ell-1)1} \end{matrix}$		E_2	$\begin{matrix} o_{22} & e_{22} & o_{32} \\ Y_{e\ell 2} \\ Y_{o\ell 2} \end{matrix}$
	E_{2u}	$\begin{matrix} o_{32} & e_{32} & o_{52} \\ Y_{e(2\ell-1)2} \\ Y_{o(2\ell-1)2} \end{matrix}$		E_3	$\begin{matrix} o_{33} & e_{33} & o_{43} \\ Y_{e\ell 3} \\ Y_{o\ell 3} \end{matrix}$
	E_{3u}	$\begin{matrix} o_{33} & e_{33} & o_{53} \\ Y_{e(2\ell-1)3} \\ Y_{o(2\ell-1)3} \end{matrix}$		E_4	$\begin{matrix} o_{44} & e_{44} & o_{54} \\ Y_{e\ell 4} \\ Y_{o\ell 4} \end{matrix}$
	E_{1g}	$\begin{matrix} o_{21} & e_{21} & o_{41} \\ Y_{e(2\ell)1} \\ Y_{o(2\ell)1} \end{matrix}$	\dots	\dots	
	E_{2g}	$\begin{matrix} o_{22} & e_{22} & o_{42} \\ Y_{e(2\ell)2} \\ Y_{o(2\ell)2} \end{matrix}$			
	E_{3g}	$\begin{matrix} o_{43} & e_{43} & o_{63} \\ Y_{e(2\ell)3} \\ Y_{o(2\ell)3} \end{matrix}$			
\dots	\dots				

Рисунок 4 – Примеры мультипольной классификации собственных мод акустических резонаторов симметрии $D_{\infty h}$ (а) и $C_{\infty v}$ (б). Приведены примеры распределений поля давления собственных мод резонаторов соответствующих симметрий, преобразующихся по разным неприводимым представлениям, а также мультиполи, которые преобразуются по этим же представлениям. Для каждого неприводимого представления выписана общая формула мультиполей, ℓ принимает такие целые значения, чтобы второй индекс был больше или равен третьему индексу

тый резонатор, то есть резонатор с жесткими стенками (условие на границе $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{in}|_{\partial\Omega} = 0$). Моды открытого резонатора имеют такие же свойства симметрии и похожую структуру [38].

1.3 Рассеяние Ми

Как было показано ранее, уравнения (1) и (2) в окружающей резонатор среде можно представить в виде уравнения Гельмгольца (5). В сферических координатах уравнение принимает вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0, \quad (28)$$

где θ и φ — полярный и азимутальный угол (рисунок 5 а). В соответствии с условием Зоммерфельда на поле излучения (6), среди решений этого урав-

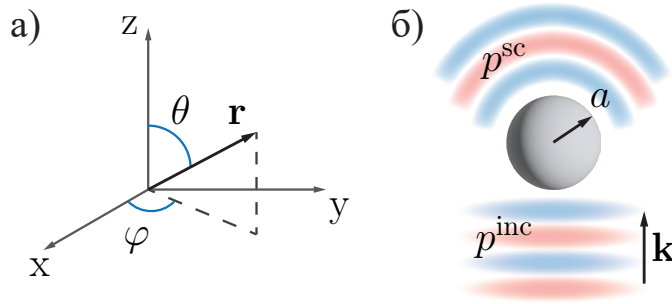


Рисунок 5 – а) Сферические координаты. б) Схема задачи рассеяния на сфере. \mathbf{k} — волновой вектор плоской акустической волны, направленный вдоль оси z

нения остаются только распространяющиеся от центра решения, пропорциональные e^{ikr}

$$p(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell m} h_{\ell}^{(1)}(kr) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi), \quad (29)$$

где $h_{\ell}^{(1)}(kr)$ — сферические функции Ханкеля, $Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$ — сферические функции (гармоники). Такое разложение функции называют мультипольным. Сферические функции имеют вид

$$Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2\ell + 1)(\ell - m)!}{4\pi(\ell + m)!}} P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (30)$$

где $P_{\ell}^m(x)$ — присоединённые многочлены Лежандра [39]. Вещественные сферические функции получаются из комплексных следующим образом

$$Y_{p\ell m} = \begin{cases} \sqrt{2}(-1)^m \operatorname{Im}\{Y_{\ell}^{|m|}\}, & p = o \\ Y_{\ell}^0, & m = 0, \\ \sqrt{2}(-1)^m \operatorname{Re}\{Y_{\ell}^m\}, & p = e \end{cases} \quad (31)$$

где индекс p отвечает за четность (о) или нечетность (е) гармоник, $\ell \geq 0$, $0 \leq m \leq \ell$ [40].

Сферические гармоники преобразуются по разным неприводимым представлениям группы симметрии резонатора, поэтому каждому неприводимому представлению можно сопоставить ряд мультиполей, что показано на рисунке 3 и рисунке 4 [38]. На рисунках сферические функции

изображены в виде параметрических поверхностей заданных уравнением $r(\theta, \varphi) = |Y_{\ell m}(\theta, \varphi)|$ в сферических координатах, цвет поверхности обозначает знак $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$. Знание о том, по каким неприводимым представлениям группы симметрии системы преобразуются сферические функции, позволяет, например, предсказывать, вклады каких мультиполей можно ожидать в рассеянном поле [38].

Геометрия резонатора определяет то, как на нем будут рассеиваться падающие акустические волны. Рассмотрим самый простой случай открытого резонатора — сферический резонатор радиуса a , на который падает плоская акустическая волна (рисунок 5 б). Задачу рассеяния плоской волны на сферическом резонаторе часто называют задачей о рассеянии Ми в честь Густава Ми, решившего её в 1908 году [41]. Хотя Густав Ми решал задачу о рассеянии электромагнитных волн на диэлектрической сфере, название закрепилось и в акустике [5; 38].

Пусть плоская акустическая волна падает вдоль оси z с частотой ω и волновым вектором $k = \omega/c_{\text{out}}$. Полное давление $p^{\text{tot}}(\mathbf{r})$ равно сумме давлений падающей волны $p^{\text{inc}}(\mathbf{r})$ и рассеянной $p^{\text{sc}}(\mathbf{r})$

$$p^{\text{tot}}(\mathbf{r}) = p^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + p^{\text{sc}}(\mathbf{r}). \quad (32)$$

Чтобы найти давление рассеянного поля, необходимо разложить p^{tot} по сферическим гармоникам аналогично (29) отдельно внутри и снаружи резонатора, а затем сшить два этих разложения на границе сферы, используя условия (3) и (4). Задача симметрична относительно вращений вокруг оси z , поэтому рассеянное поле вне резонатора раскладывается в сумму сферических функций только с $m = 0$, которые не зависят от азимутального угла φ

$$p_{\text{out}}^{\text{sc}}(r, \theta) = p_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} h_{\ell}^{(1)}(kr) P_{\ell}^0(\cos \theta). \quad (33)$$

В случае падения плоской волны с амплитудой p_0 коэффициенты a_{ℓ} равны

$$a_{\ell} = -\frac{j_{\ell}'(ka) - \beta_{\ell} j_{\ell}(ka)}{h_{\ell}^{(1)'}(ka) - \beta_{\ell} h_{\ell}^{(1)}(ka)}, \quad (34)$$

$$\beta_\ell = \frac{\rho_{\text{out}} c_{\text{out}} j'_\ell(k_1 a)}{\rho_{\text{in}} c_{\text{in}} j_\ell(k_1 a)}, \quad (35)$$

где $k_1 = \omega/c_{\text{in}}$ — волновой вектор внутри резонатора, $j_\ell(kr)$ — сферические функции Бесселя. Коэффициент a_ℓ отвечает за вклад мультиполя порядка ℓ с $m = 0$ в рассеянную волну. Сечение рассеяния выражается через эти коэффициенты следующим образом [42]

$$\sigma_{\text{sc}} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) |a_\ell|^2. \quad (36)$$

Удобно ввести нормированное сечение рассеяния

$$\Sigma = \frac{\sigma_{\text{sc}}}{\sigma_{\text{geom}}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Sigma_\ell, \quad (37)$$

где $\sigma_{\text{geom}} = \pi a^2$ — геометрическое сечение сферы, $\Sigma_\ell = \frac{4(2\ell+1)}{(ka)^2} |a_\ell|^2$ — вклад отдельного мультиполя в сечение рассеяния.

На рисунке 6 представлены нормированные сечения рассеяния на сферах с разными параметрами материалов среды и резонатора. На рисунке 6 (а)

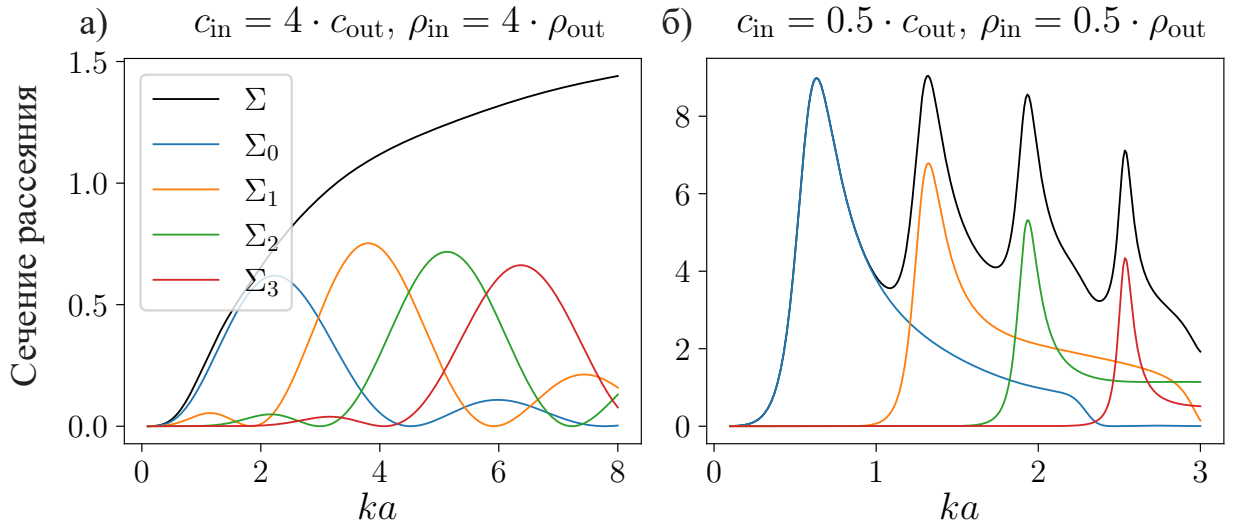


Рисунок 6 – Зависимость сечения рассеяния и мультипольных вкладов в него от частоты падающего излучения для разных материальных параметров сферы. а) Мультипольные резонансы не проявляются в сечении рассеяния (показатель преломления $n = 0.25$). б) В сечении рассеяния хорошо видны мультипольные резонансы (показатель преломления $n = 2$)

сфера имеет показатель преломления n , то есть отношение

$$n = \frac{c_{\text{out}}}{c_{\text{in}}} \quad (38)$$

меньше 1, что характерно для твердых и жидких веществ в среде из газа [5]. На рисунке 6 (б) сфера имеет показатель преломления больше 1, а спектр имеет явно выраженный резонансный характер. Эти резонансы называют резонансами Ми. В оптике резонансы Ми диэлектрических частиц с показателем преломления больше 1 стали инструментом создания метаматериалов с особыми свойствами [43; 44]. Используемые в оптике идеи могут быть перенесены на акустику, именно поэтому далее в работе будут рассматриваться частицы с показателем преломления больше 1, то есть частицы, скорость звука в которых меньше, чем скорость звука в окружающей среде. Практический интерес представляют акустические метаматериалы в воздушной среде, однако в природе существует малое количество материалов, скорость звука в которых меньше скорости звука в воздухе при нормальных условиях [5]. Примером такого материала является аэрогель, скорость звука в котором в зависимости от его реализации может достигать 100 м/с, что меньше скорости звука в воздухе, близкой к 343 м/с при нормальных условиях [45]. Существует пример создания метаатомов, обладающих эффективным показателем преломления больше 1, что может быть также использовано при реализации резонаторов с эффективным $n > 1$ [5].

Таким образом в разделе были введены уравнения и граничные условия рассматриваемой задачи, введены понятия теории представлений, используемые в работе. В пункте 1.2.2 было доказано, что симметрия резонатора определяет группу симметрии рассматриваемых уравнений. В пункте 1.2.3 была описана классификация собственных мод системы, использующая теоретико-групповые методы. Далее были введены сферические гармоники и было показано, что резонансы Ми проявляются в спектре рассеяния частиц, обладающих скоростью звука меньшей, чем в окружающей среде.

2 СВЯЗАННЫЕ И КВАЗИСВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ В КОНТИНУУМЕ

2.1 Теорема о несуществовании связанного состояния в континууме

Связанные состояния в континууме (ССК) — это собственные моды открытой системы, не взаимодействующие с модами пространства, и энергия которых лежит в области непрерывного спектра мод пространства. Моды пространства обеспечивают радиационный канал потерь энергии в системе, но из-за отсутствия взаимодействия ССК с модами пространства, их энергия не уменьшается со временем, то есть эти состояния обладают бесконечной добротностью [6; 7].

Впервые ССК были описаны в квантовой физике в работе Джона фон Неймана и Юджина Вигнера в 1929 году [46]. ССК были получены в квантовых [47; 48], оптических [9; 10], акустических системах [8; 49; 50] и системах, описываемых уравнениями теории упругости [50; 51]. В акустике и гидродинамике вместо ССК встречается название ‘захваченные’ моды (от англ. trapped modes) [7].

Теорема о несуществовании ССК в компактных резонаторах ограничивает виды систем, в которых возможно наблюдение ССК [6]. Повторим доказательство этой теоремы для рассматриваемой в данной работе задачи.

ССК не должно излучать энергию, но каждое слагаемое в мультипольном разложении поля давления вне резонатора (29) вносит вклад в вектор Пойнтинга. Чтобы энергия из системы не уходила, все коэффициенты $A_{\ell m}$ должны быть равны нулю. Но из-за того, что в системе нет областей с нулевыми или бесконечными плотностью и сжимаемостью, давление должно быть равно нулю во всем пространстве, чтобы удовлетворить условию непрерывности. Таким образом, ССК невозможно наблюдать в рассматриваемой системе.

Кроме того, в реальных системах получению состояния с бесконечной добротностью препятствуют потери в материалах и неидеальность геометрии, связанная с процессом изготовления. Однако, используя механизмы получения ССК, можно получать состояния с высокой, но не бесконечной добротностью и сколь угодно приблизиться к ССК даже в компактных резонаторах. Такие состояния называют квазисвязанными состояниями в континууме

(КССК) [7]. КССК были так же получены в различных системах [12; 49; 52; 53].

2.2 Механизм Фридриха–Винтгена

Одним из механизмов получения ССК является механизм Фридриха–Винтгена [54]. Этот механизм можно объяснить следующим образом. Рассмотрим две собственные моды системы Ψ_1 и Ψ_2 с близкими, но не равными частотами ω_1 и ω_2 , которые взаимодействуют с континуумом (модами непрерывного спектра открытой системы). Из-за этого взаимодействия собственные частоты имеют мнимые части $-\gamma_1 < 0$ и $-\gamma_2 < 0$, характеризующие темп радиационных потерь. Эффективный гамильтониан в двухмодовом приближении имеет вид

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \omega_1 - i\gamma_1 & \kappa \\ \kappa & \omega_2 - i\gamma_2 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

где κ характеризует взаимодействие двух этих мод через континуум (рисунок 7 а). Собственные числа этого гамильтониана имеют вид

$$\lambda_{\pm} = \frac{\omega_1 - i\gamma_1 + \omega_2 - i\gamma_2 \pm \sqrt{(\omega_1 - i\gamma_1 - \omega_2 + i\gamma_2)^2 + 4\kappa^2}}{2}. \quad (40)$$

Пример зависимости собственных чисел от параметра системы представлен на рисунке 7 (б, в). Из-за знака \pm у одного собственного числа мнимая часть меньше, чем у другого. При определенном подборе параметров системы можно наблюдать ситуацию, когда одно из собственных чисел имеет мнимую часть равную нулю (рисунок 7 (в)). В таком случае одна из собственных мод становится ССК (по формуле (11) добротность такой моды бесконечна), а другая имеет конечную добротность (рисунок 7 (г)) [6; 7].

Важно отметить, что связь двух мод через континуум возможна только в том случае, если собственные моды преобразуются по одному неприводимому представлению. Недиагональные элементы в гамильтониане определяются интегралом вида $\kappa \propto \int \Psi_1 \hat{H}_{\text{eff}} \Psi_2 dr$. По правилам отбора такой интеграл равен нулю, если подынтегральная функция преобразуются не по тождественному представлению группы симметрии системы [55]. Так как гамильтониан системы преобразуется по тождественному представлению группы (он инвариантен относительно всех преобразований группы), то определяющим фактором является то, по какому неприводимому представлению пре-

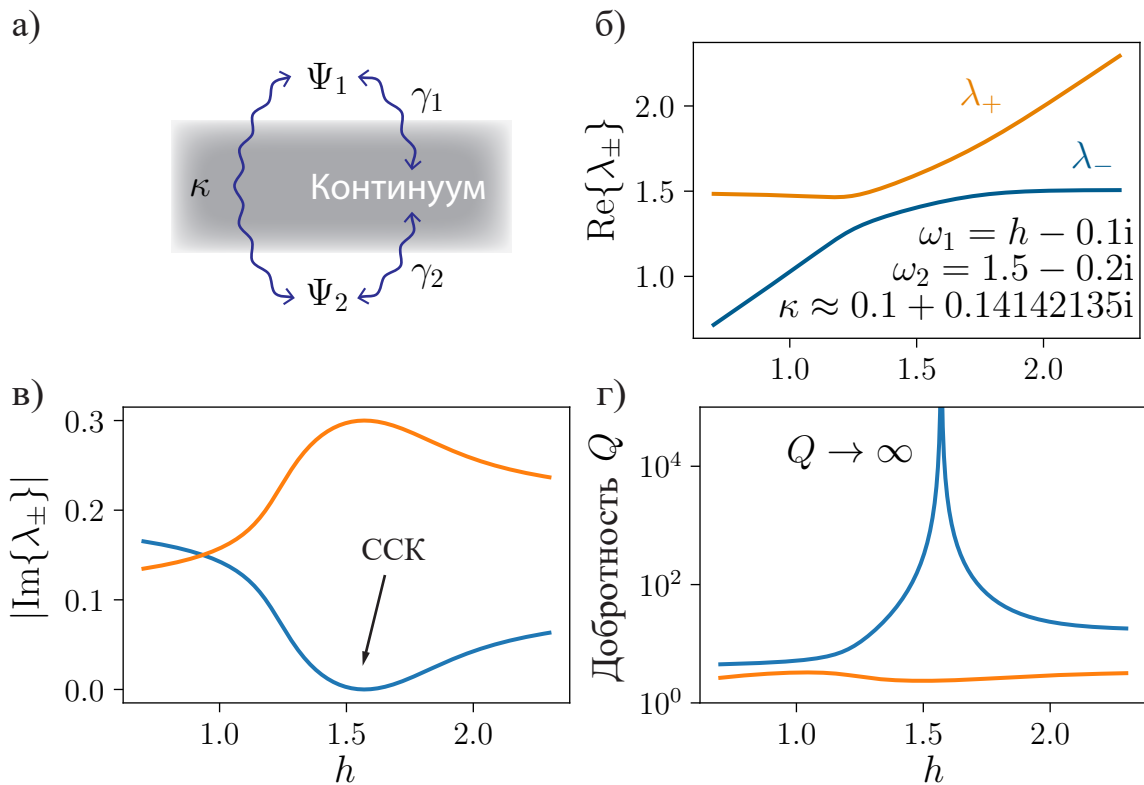


Рисунок 7 – а) Механизм Фридриха–Винтгена. Схема взаимодействия мод с континуумом и друг с другом через континуум. б) Вещественная часть собственных чисел λ_{\pm} эффективного гамильтониана \hat{H}_{eff} , параметры системы указаны на графике. в) Мнимая часть собственных чисел λ_{\pm} . Одно из собственных чисел достигает нуля, что соответствует ССК. г) Добротность собственных чисел. Добротность в точке ССК стремится к бесконечности

образуется произведение $\Psi_1 \Psi_2$. Произведение двух функций преобразуется по прямому произведению их представлений, в него входит тождественное представлению только в том случае, если функции преобразуются по одному неприводимому представлению [55].

Таким образом, невырожденные моды могут взаимодействовать через континуум, если они преобразуются по одному неприводимому представлению. В случае взаимодействия мод при некоторых параметрах системы возможно возникновение ССК по механизму Фридриха–Винтгена.

2.3 Результаты моделирования

Для демонстрации механизма Фридриха–Винтгена было проведено численное моделирование в программном обеспечении COMSOL Multiphysics® с использованием модуля акустики жидкости и газа (Pressure acoustics). Геометрии рассматриваемых систем групп сим-

метрии $D_{\infty h}$ и C_{4v} представлены на рисунке 8. Используемые параметры

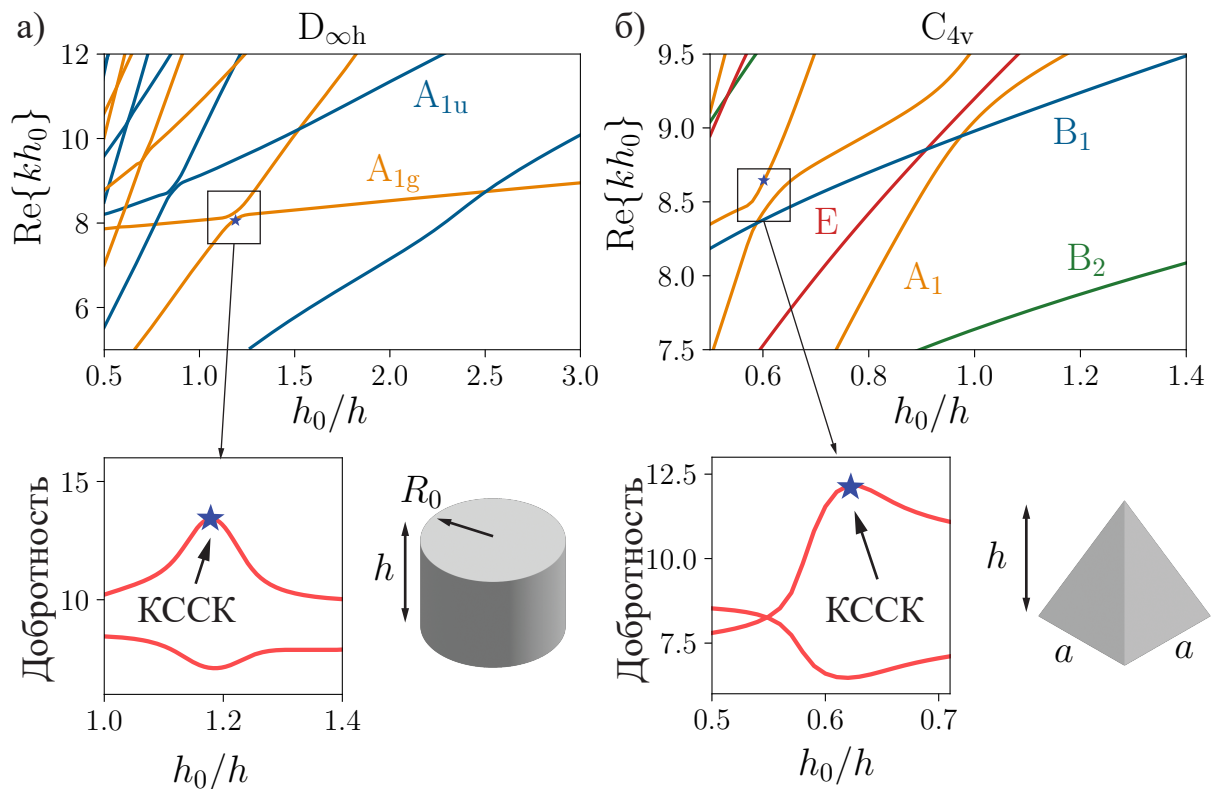


Рисунок 8 – Вещественные части собственных частот резонаторов симметрии $D_{\infty h}$ (а) и C_{4v} (б) в зависимости от высоты резонатора. Моды, преобразующиеся по разным неприводимым представлениям каждой из групп симметрии, выделены одним цветом. Антипересечения мод, в которых наблюдаются КССК выделены квадратами. Соответствующие этим антипересечениям зависимости добротности мод от высоты резонатора представлены в нижнем ряду

геометрии: $h_0 = 1$ м, $R_0 = 0.5$ м, $a = 1$ м. Используемые параметры материалов: скорость и плотность материала среды $\rho_0 = 1$ кг/м³, $c_0 = 1$ м/с, скорость и плотность материала резонатора $\rho_1 = \rho_0/2$, $c_1 = c_0/2$.

Чтобы удовлетворить условию Зоммерфельда (6) при моделировании, можно использовать граничное условие рассеяния первого порядка (SBC, от англ. scattering boundary condition), которое по сути является явным условием Зоммерфельда на границе моделируемого объема, или использовать поглощающий идеально согласованный слой (PML, от англ. perfectly matched layer). На рисунке 9 представлены зависимости вещественных частей собственных частот резонатора симметрии $D_{\infty h}$ при использовании этих двух способов. Представлены только моды с азимутальным числом $m = 0$, что соответствует модам, которые обладают вращательной симметрией относи-

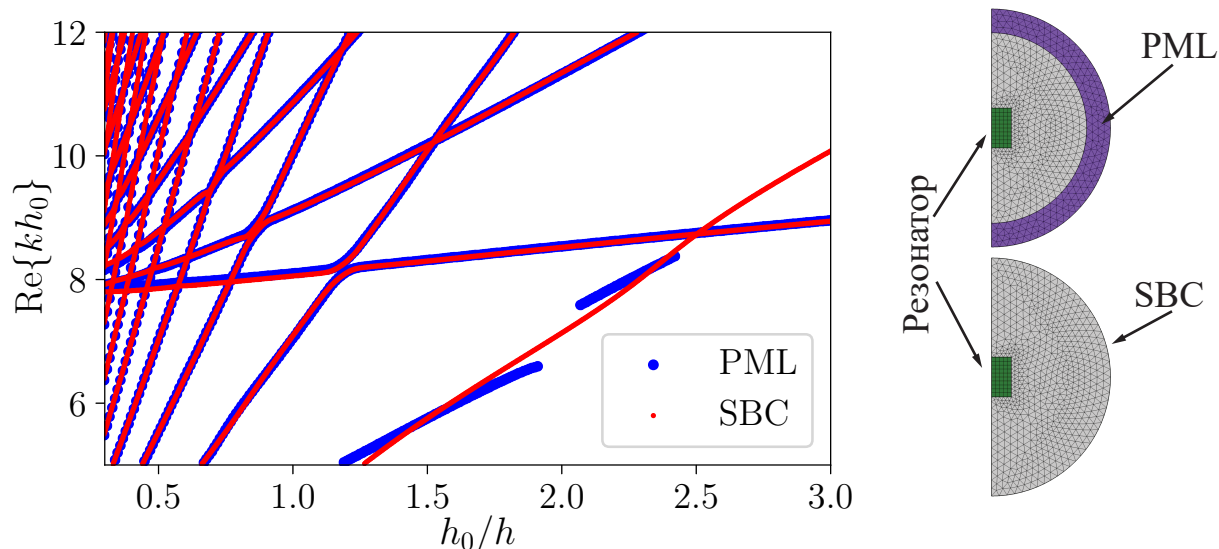


Рисунок 9 – Сравнение получаемых при моделировании зависимостей вещественных частей собственных частот мод цилиндрического резонатора от его высоты при использовании PML и SBC. Приведены моделируемые области сечения для осесимметричной задачи при использовании PML и SBC

тельно оси цилиндра и преобразуются по неприводимым представлениям A_{1u} и A_{1g} (рисунок 4). Особенность азимутального числа заключается в том, что оно полностью определяет переменную, зависящую от азимутального угла φ (рисунок 5 а), получаемую при разделении переменных в уравнении Гельмгольца в цилиндрических координатах [42]. Таким образом, при моделировании нужно решать лишь двумерную задачу в координатах r и z . Здесь и далее в ходе постобработки результатов были удалены PML моды. Эти моды обладают низкой добротностью и появляются из-за дискретизации операторов при численном расчете и из-за того, что PML слой конечен [56]. Аналогичные моды, связанные с дискретизацией задачи и ошибками численного решения и не относящиеся к физике задачи, проявляются и при использовании SBC, они также удалены. Оба способа показывают схожий результат, однако PML моды на низких частотах вносят большую ошибку в низкодобротные собственные моды самой системы, это проявляется в виде разрыва на графике для PML на рисунке 9. Разрыв появился из-за смешивания низкодобротной моды системы и PML мод, которые были удалены. В дальнейшем при моделировании использовалось условие SBC, если не указано иное.

В результате численного моделирования были найдены собственные частоты резонаторов симметрии C_{4v} и $D_{\infty h}$ в зависимости от высоты резо-

натора (рисунок 8). Собственные моды были классифицированы в соответствии с неприводимыми представлениями, по которым они преобразуются. У резонатора симметрии $D_{\infty h}$ были рассмотрены только моды с нулевым азимутальным числом, то есть моды, преобразующиеся по представлениям A_{1u} и A_{1g} . Моды, преобразующиеся по разным неприводимым представлениям отмечены разными цветами. Как было сказано ранее, между модами, которые преобразуются по разным неприводимым представлениям, нет взаимодействия. Это проявляется в том, что на рисунке 8 такие моды пересекаются. Между модами, которые преобразуются по одному неприводимому представлению, возникает антипересечение (в англ. *avoided crossing* или *anticrossing*). Два таких антипересечения выделены квадратами. Из показанных отдельно добротностей антипересекающихся пар мод видно, что одна из мод, соответствующая КССК, при антипересечении имеет высокую добротность, другая же имеет низкую добротность, что соответствует механизму Фридриха–Винтгена.

Чтобы показать, что возникновение КССК по механизму Фридриха–Винтгена связано не с конкретной формой резонатора, а со свойствами симметрии системы, был рассмотрен резонатор в форме яблока. Геометрия представлена на рисунке 10. Резонатор обладает уже рассмотренной симметрией $D_{\infty h}$, но отличной от цилиндра формой. Начальная габаритная высота яблока $h_0 = 3$ см, в качестве среды использовался материал близкий к воздуху, обладающий параметрами $\rho_0 = 1.225$ кг/м³ и $c_0 = 335$ м/с [45; 57]. Параметры материала резонатора: $\rho_1 = 4.2\rho_0$, $c_1 = c_0/3$. Как и ранее, рассматривались только моды, преобразующиеся по одномерным неприводимым представлениям A_{1g} и A_{1u} . На рисунке 10 изображены зависимости вещественной части собственных частот в зависимости от высоты резонатора. Зависимости проявляют те же свойства, которыми обладают и рассмотренные ранее резонаторы. Пересечения возникают между модами, преобразующимися по разным неприводимым представлениям, антипересечения возникают между модами, преобразующимися по одному неприводимому представлению. Добротности некоторых пар антипересекающихся мод представлены на рисунке 10. При антипересечении одна из мод в паре имеет повышенную добротность, достигающую сотен единиц, другая — пониженную.

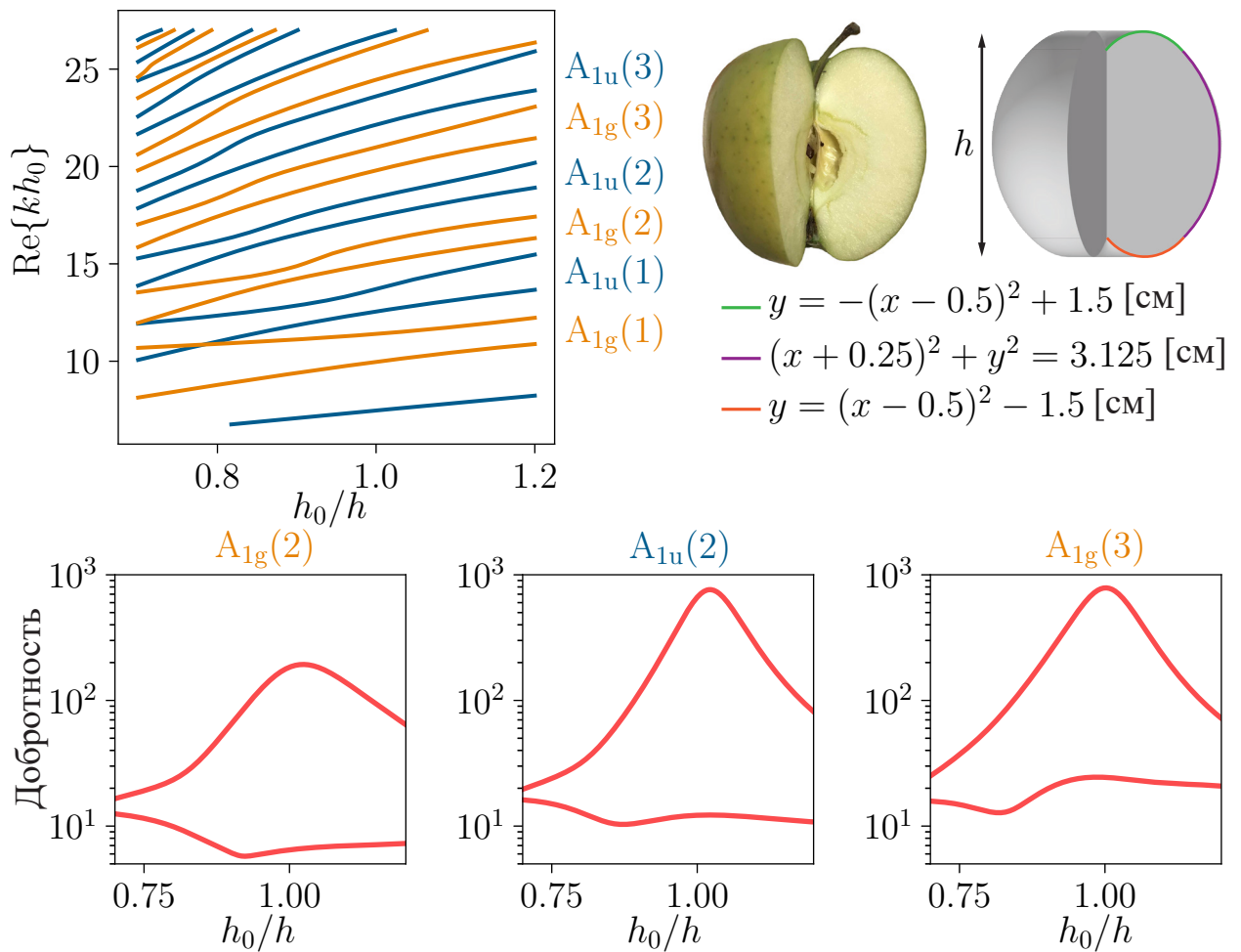


Рисунок 10 – Зависимость вещественной части собственных частот резонатора в форме яблока от его высоты. Моды, преобразующиеся по разным неприводимым представлениям, отмечены разным цветом.

Отдельно показаны добротности нескольких пар мод, на которых наблюдается КССК при антипересечении. Пары мод отмечены названием неприводимого представления и номером в скобках

В разделе было показано, что в компактном акустическом резонаторе не может существовать ССК, однако существование КССК не запрещено. Один из механизмов появления ССК, механизм Фридриха–Винтгена, описан в подразделе 2.2. Были приведены примеры КССК полученный по этому механизму. Важно отметить, что этот механизм связан не с формой резонатора, а со свойствами симметрии системы, в частности, с тем, что моды, преобразующиеся по одному неприводимому представлению, могут взаимодействовать через континуум.

3 ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ

3.1 Исключительные точки

Исключительная точка (ИТ) — точка в пространстве параметров, в которой происходит вырождение двух или более собственных чисел с одновременным вырождением собственных состояний [13; 14]. Параметрами системы могут быть, например, мощности накачки и потерь, различные геометрические и материальные параметры систем [13; 22; 58–62]. Впервые термин ‘exceptional point’ ввел Тосио Като в своей книге о теории возмущений линейных операторов [63], этот термин на русском языке можно встретить в переводе его книги [64]. ИТ, в отличие от обычных точек вырождения спектра, возможны только в неэрмитовых системах [17]. В этих системах может быть невозможным сведение оператора к диагональному виду, что математически связано с невозможностью диагонализировать жорданову клетку. Собственные числа и векторы жордановой клетки соответствует определению ИТ: у вырожденных собственных чисел алгебраическая кратность больше, чем геометрическая [14; 65].

Чтобы продемонстрировать основные свойства ИТ, рассмотрим аналогичные рассмотренной в разделе 2.2 эффективные гамильтонианы двухуровневых систем

$$\hat{H}_{\text{eff}}^{\text{DP}} = \begin{pmatrix} \omega_1 - i\gamma_1 & 0 \\ 0 & \omega_1 - i\gamma_1 \end{pmatrix}, \quad (41)$$

$$\hat{H}_{\text{eff}}^{\text{EP}} = \begin{pmatrix} \omega_1 - i\gamma_1 & \chi \\ 0 & \omega_1 - i\gamma_1 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Гамильтониан $\hat{H}_{\text{eff}}^{\text{DP}}$ соответствует системе с двукратно вырожденной собственной частотой $\omega_1 - i\gamma_1$, гамильтониан $\hat{H}_{\text{eff}}^{\text{EP}}$ соответствует системе с единственным собственным состоянием с частотой $\omega_1 - i\gamma_1$ и имеет форму жордановой клетки. Добавим в каждую из систем возмущение вида

$$\Delta \hat{H}_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Для простоты изложения будем считать κ и χ вещественными. Несложно найти собственные числа новых гамильтонианов. Собственные числа и век-

торы гамильтониана $\hat{H}_{\text{eff}}^{\text{DP}} + \Delta\hat{H}_{\text{eff}}$ равны

$$\lambda_{\pm}^{\text{DP}} = \omega_1 - i\gamma_1 \pm \kappa, \quad (44)$$

$$\Psi_{\pm}^{\text{DP}} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Собственные числа и векторы гамильтониана $\hat{H}_{\text{eff}}^{\text{EP}} + \Delta\hat{H}_{\text{eff}}$ равны

$$\lambda_{\pm}^{\text{EP}} = \omega_1 - i\gamma_1 \pm \sqrt{\kappa(\kappa + \chi)}, \quad (46)$$

$$\Psi_{\pm}^{\text{EP}} = \begin{pmatrix} \kappa + \chi \\ \pm \sqrt{\kappa(\kappa + \chi)} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Если рассмотреть предел $\kappa \rightarrow 0$, то видно, что кроме вырождения собственных частот $\lambda_{\pm}^{\text{EP}}$ вырождаются и Ψ_{\pm}^{EP} , что является определяющим ИТ свойством. В случае простого вырождения при $\kappa \rightarrow 0$ аналогично вырождаются $\lambda_{\pm}^{\text{DP}}$, однако Ψ_{\pm}^{DP} остаются ортогональными друг другу.

ИТ обладают свойством расщепления, которое можно использовать для построения сенсоров. Рассмотрим величины расщепления двух собственных частот

$$\Delta\lambda^{\text{DP}} = |\lambda_{+}^{\text{DP}} - \lambda_{-}^{\text{DP}}| = |2\kappa|, \quad (48)$$

$$\Delta\lambda^{\text{EP}} = |\lambda_{+}^{\text{EP}} - \lambda_{-}^{\text{EP}}| = |2\sqrt{\kappa(\kappa + \chi)}|. \quad (49)$$

При малом параметре возмущения $\kappa \ll 1$, $\kappa \ll \chi$ расщепление частот в области точки простого вырождения $\Delta\lambda^{\text{DP}}$ имеет линейную зависимость от параметра возмущения, а в области ИТ — корневую (рисунок 11). Корневая зависимость имеет в ИТ (то есть в точке $\kappa = 0$) бесконечную производную, а это значит, что при малейших изменениях параметров системы, собственные частоты расщепляются быстрее в сравнении с обычным вырождением. Это расщепление можно обнаружить в эксперименте [16; 61].

В рассмотренной модели кратность вырождения была равна двум, однако кратность может быть любой. Расщепление частот в области ИТ n -ого порядка пропорционально корню $\sqrt[n]{\kappa}$, рост которого тем больше, чем больше n [66]. В данной работе рассматриваются ИТ только второго порядка, хотя результаты могут быть обобщены и на старшие порядки.

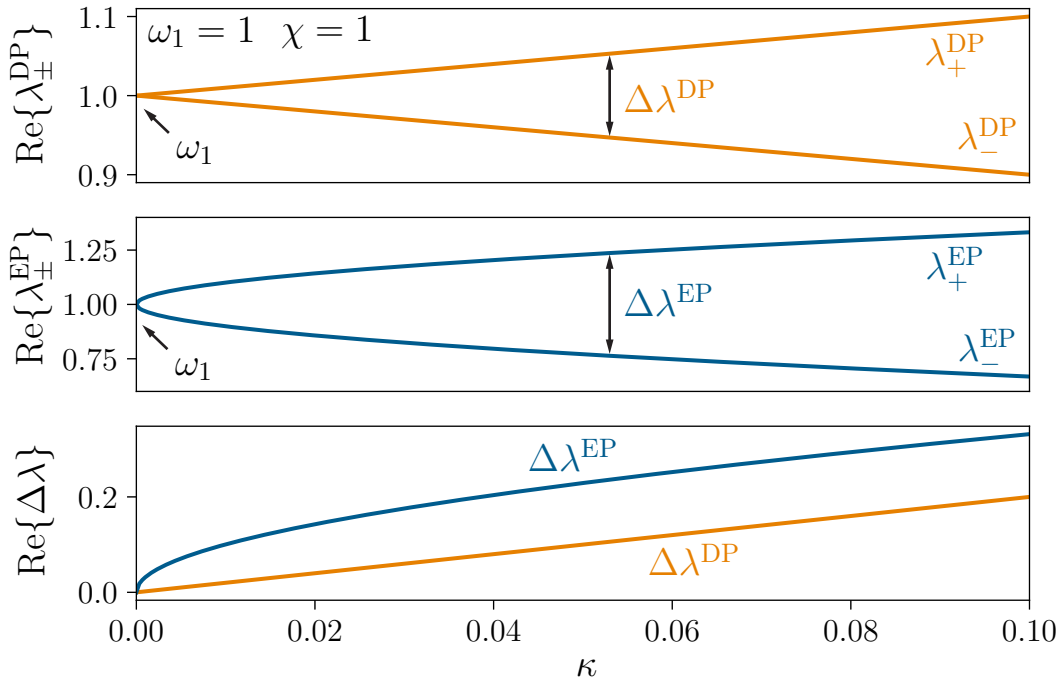


Рисунок 11 – Сравнение поведения собственных частот вблизи исключительной точки. На двух верхних графиках показаны зависимости вещественных частей собственных частот $\lambda_{\pm}^{\text{DP}}$ и $\lambda_{\pm}^{\text{EP}}$ от κ . На нижнем графике — сравнение зависимостей расщепления от параметра κ

3.2 Переход от антипересечения к пересечению при нарушении симметрии системы

Как было сказано в подразделе 2.2, моды, преобразующиеся по разным неприводимым представлениям, не взаимодействуют, а моды, которые преобразуются по одному неприводимому представлению, могут взаимодействовать. Существует способ включить взаимодействие между модами — для этого необходимо определенным образом нарушить симметрию системы. Нарушение симметрии должно быть таким, чтобы два неприводимых представления исходной группы симметрии системы перешли в одно представление новой группы симметрии. Чтобы определить, как соотносятся представления из разных групп симметрии между собой, можно воспользоваться таблицами с мультипольной классификацией (рисунок 3 и рисунок 4). Из них следует, что при переходе от системы группы симметрии $D_{\infty h}$ к системе группы симметрии $C_{\infty v}$ два одномерных представления A_{1u} и A_{1g} переходят в одномерное представление A_1 группы $C_{\infty v}$ (рисунок 12).

Описанный выше рецепт позволяет из пересечения сделать антипересечение. Чтобы показать это, в рассматриваемые ранее геометрии был до-

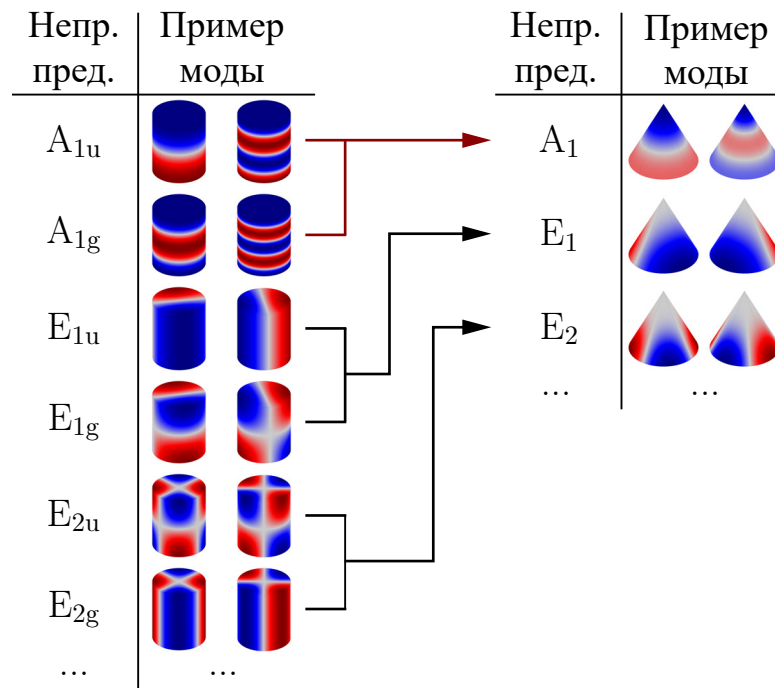


Рисунок 12 – Соотношения неприводимых представлений групп симметрии $D_{\infty h}$ и $C_{\infty v}$. Стрелками показаны переходы неприводимых представлений одной группы в неприводимые представления другой. Красной стрелкой отмечен рассмотренный в работе переход двух одномерных неприводимых представлений группы цилиндра A_{1u} и A_{1g} в одно одномерное представление A_1 группы конуса

бавлен параметр α , нарушающий симметрию. У цилиндрического резонатора группы симметрии $D_{\infty h}$ изменение значения этого параметра от 1 до 0 уменьшает верхний радиус и одновременно с этим увеличивает нижний (рисунок 13). Из-за нарушения симметрии относительно плоскости перпендикулярной оси цилиндра, система теперь имеет группу симметрии конуса $C_{\infty v}$. На рисунке 13 показано, что пересечения переходят в антипересечения при $\alpha = 0.89$, потому что моды, которые преобразовывались по разным неприводимым представлениям, теперь преобразуются по одному.

Аналогичное моделирование было проведено для резонатора симметрии C_{4v} . Параметр α уменьшал две противоположные стороны основания пирамиды, делая из квадратного основания прямоугольное (рисунок 14). При $\alpha = 0.92$ наблюдается аналогичный случаю нарушения симметрии цилиндра переход от пересечений к антипересечениям. В данном случае, одномерные представления A_1 и B_1 группы C_{4v} перешли в одномерное представление A_1 группы C_{2v} (рисунок 3).

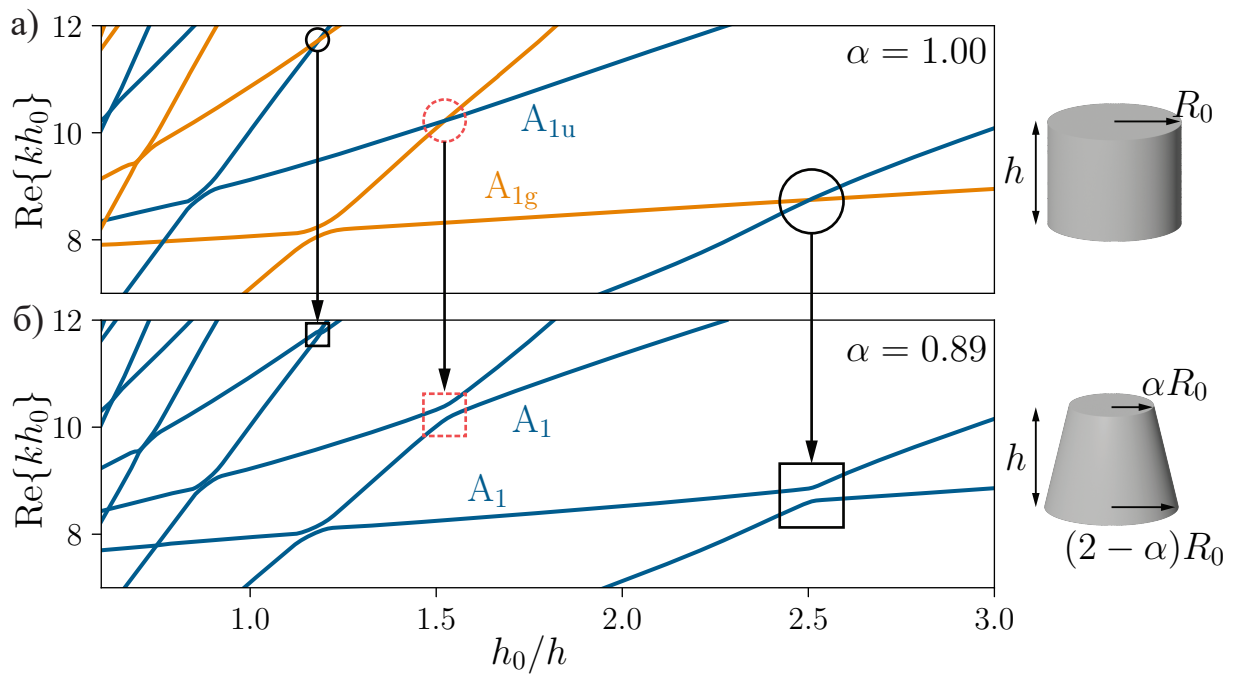


Рисунок 13 – Зависимости вещественной части собственных частот от высоты цилиндрического резонатора при $\alpha = 1$ и $\alpha = 0.89$. Стрелками отмечен переход от пересечений к антипересечениям при нарушении группы симметрии резонатора

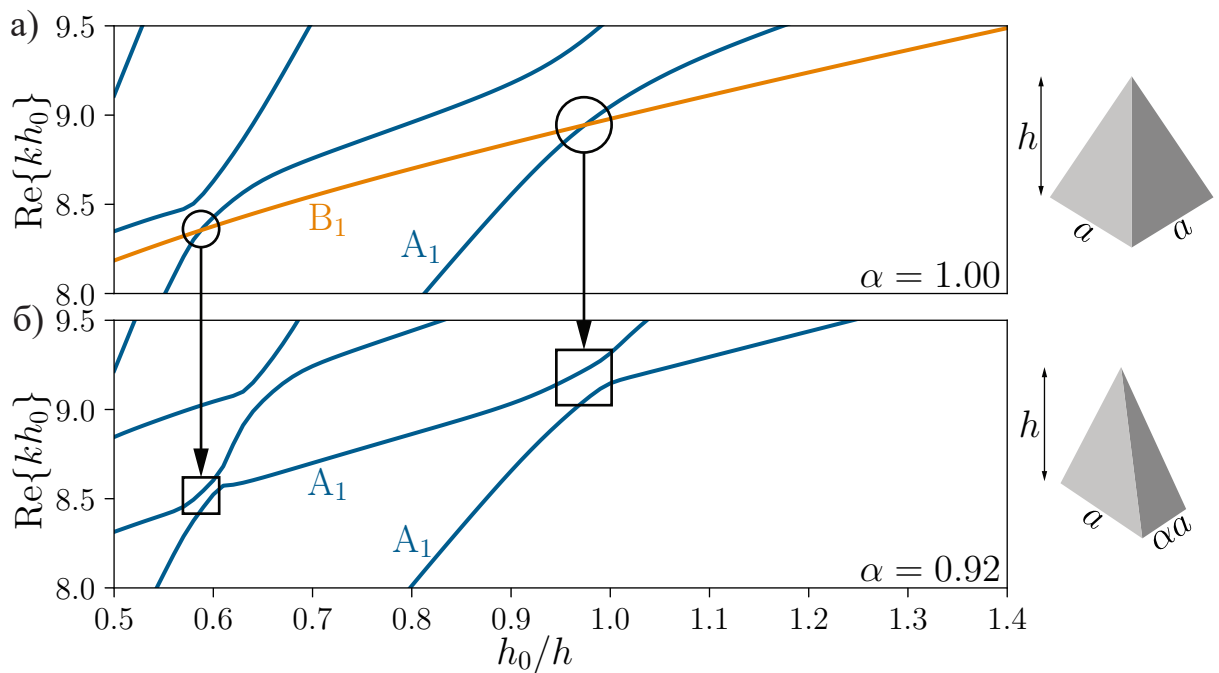


Рисунок 14 – Зависимости вещественной части собственных частот от высоты резонатора симметрии C_{4v} при $\alpha = 1$ и $\alpha = 0.92$. Стрелками отмечен переход от пересечений к антипересечениям при нарушении группы симметрии резонатора

3.3 Пример исключительной точки

Ранее речь шла только о вещественной части спектра. Рассмотрим подробнее переход пары мод от пересечения к антипересечению, выделенный на рисунке 13 пунктирной линией. На рисунке 15 представлены вещественная (а, в, д) и мнимая (б, г, д) части двух собственных частот резонатора в зависимости от его высоты при разных значениях параметра α . При $\alpha = 1$ на-

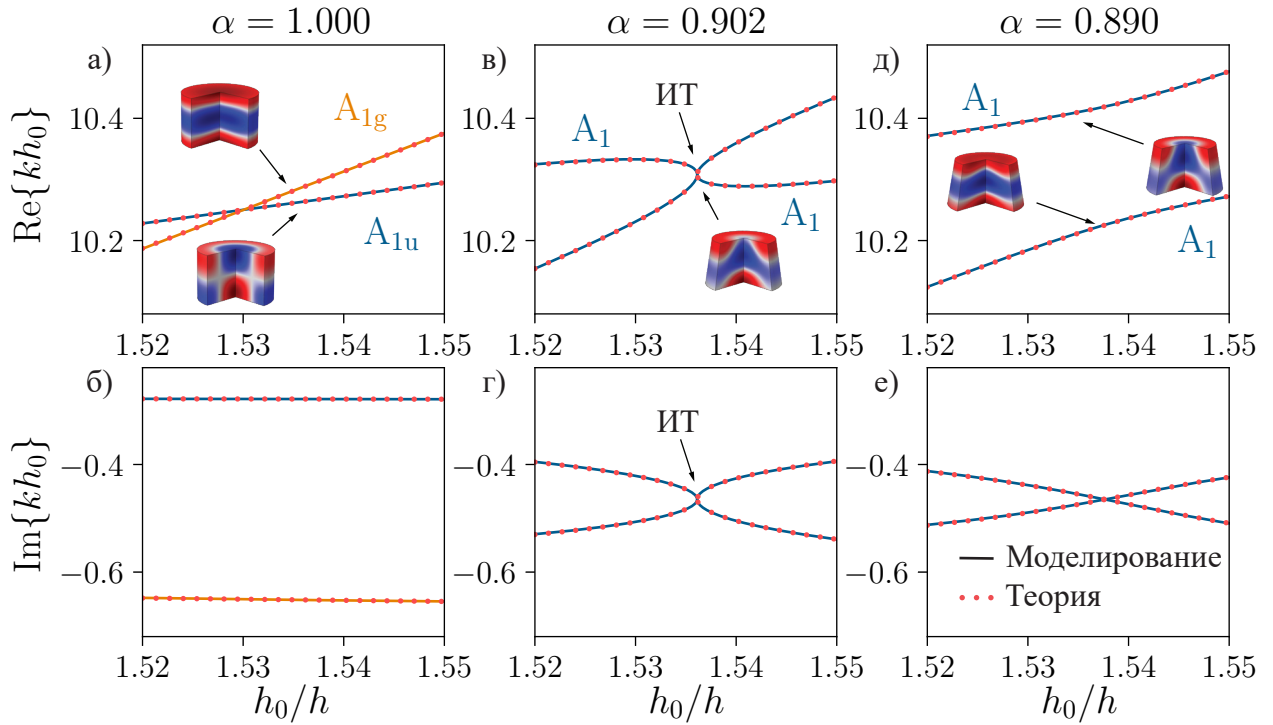


Рисунок 15 – Зависимости вещественных и мнимых частей собственных мод от высоты акустического резонатора симметрии цилиндра при разных значениях параметра α , нарушающего симметрию. При $\alpha = 0.092$ наблюдается ИТ

блюдается пересечение вещественной части и отсутствие пересечения мнимой части собственных частот (а, б). При $\alpha = 0.89$ ситуация противоположна: антипересечение в вещественной части и пересечение в мнимой части спектра (д, е). Можно предположить, что существует такое значение параметра α при котором пересекаются и мнимая и вещественная части собственных частот. И действительно, при $\alpha = 0.902$ на рисунке 13 (в, г) существует точка на оси параметра h_0/h , в которой две собственные частоты вырождаются, то есть имеет место равенство вещественных и мнимых частей двух собственных частот.

В отличие от обычного вырождения, которое соответствовало бы двум модам, преобразующимся по двумерному представлению, или случайному вырождению двух мод, преобразующихся по разным неприводимым представлениям, наблюдается вырождение двух мод, преобразующихся по одномерному неприводимому представлению. В соответствии со следствием из теоремы Вигнера в этой точке кратность вырождения этих мод равна одному, а значит, в этой точке существует только одна мода, то есть нельзя выделить две линейно независимые моды, обладающие одинаковой собственной частотой. Таким образом, геометрическая кратность собственных чисел меньше алгебраической, что соответствует ИТ.

Важно отметить, что ИТ может появиться только в том случае, если происходит снижение суммы размерностей представлений. Только в таком случае может возникнуть ситуация, когда количество собственных мод, участвующих в вырождении, больше, чем размерность нового представления. ИТ не может возникнуть в случае, если, например, два одномерных представления переходят в одно двумерное. В этом случае вырожденная собственная частота будет соответствовать двум различным модам.

3.4 Модель собственных частот в окрестности исключительной точки

Обычно для описания свойств собственных частот в области ИТ в квантовой механике, оптике и фотонике применяется теория связанных состояний и двухуровневые системы, подобные описанной выше [13–16; 67]. Теория связанных состояний применялась и в акустике, но не в рассмотренном в этой работе случае возмущения геометрии компактного резонатора [68; 69]. Чтобы описать поведение собственных частот системы в области ИТ, можно применить технику разложения по резонансным состояниям, которая используется в подобных системах в оптике, однако ещё не была применена в системах, описываемых уравнениями линейной акустики (1) и (2) [28; 56]. В этой работе не обсуждается полнота, нормировка собственных мод резонатора и скалярное произведение между ними, поэтому дальнейшая модель носит феноменологический характер, достаточный для получения общей физической картины.

При изменении геометрии резонатора в формуле (8) к оператору $\hat{\mathbb{P}}(\mathbf{r})$, который и задает форму резонатора, добавится возмущение $\Delta\hat{\mathbb{P}}(\mathbf{r})$

$$\hat{\mathbb{D}}(\mathbf{r})\vec{\mathbb{F}}(\mathbf{r}) = \tilde{\omega} \left(\hat{\mathbb{P}}(\mathbf{r}) + \Delta\hat{\mathbb{P}}(\mathbf{r}) \right) \vec{\mathbb{F}}(\mathbf{r}), \quad (50)$$

где $\vec{\mathbb{F}}$ и $\tilde{\omega}$ — собственные частоты и моды возмущенной системы. Предполагая, что собственные моды возмущенного резонатора представимы в виде суммы мод исходного резонатора $\vec{\mathbb{F}}(\mathbf{r}) = \sum_n c_n \vec{\mathbb{F}}_n(\mathbf{r})$ и используя формализм, введённый в работе [28], приходим к системе уравнений на коэффициенты c_n

$$\sum_n ((\tilde{\omega} - \omega_n)\delta_{mn} + \tilde{\omega}V_{mn}) c_n = 0, \quad (51)$$

где $V_{nm} \propto \int \vec{\mathbb{F}}_m^T \Delta\hat{\mathbb{P}} \vec{\mathbb{F}}_n d\mathbf{r}$. В двухмодовом приближении уравнение (51) имеет вид

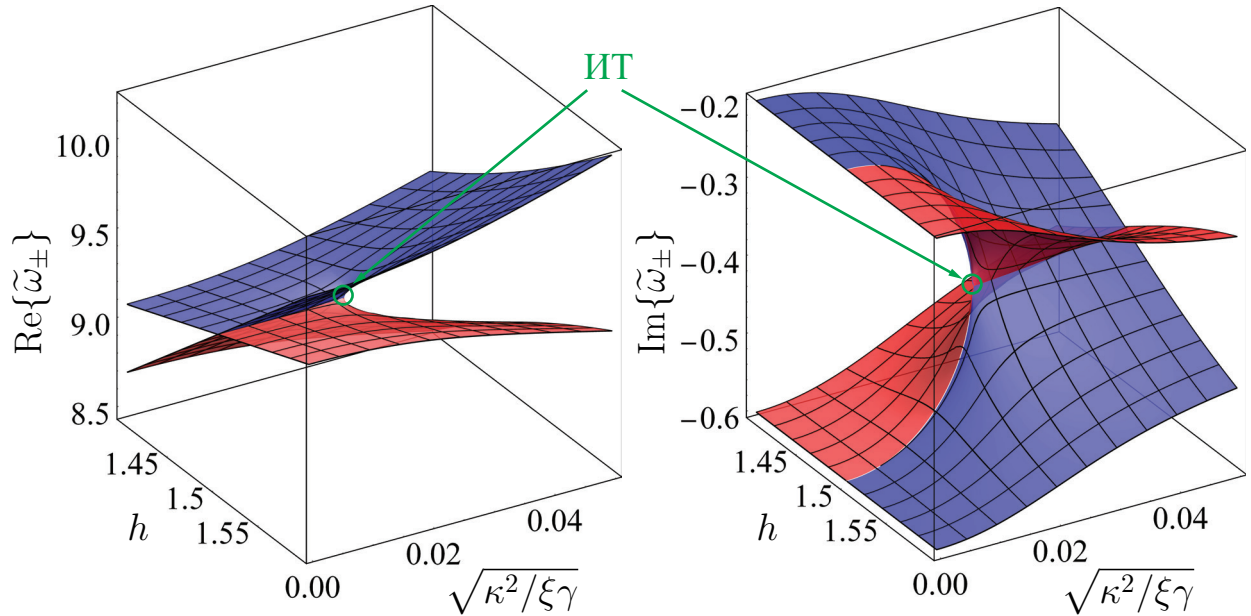
$$\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \tilde{\omega} \begin{pmatrix} 1 + V_{11} & V_{12} \\ V_{12} & 1 + V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Собственные числа этого уравнения равны

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{\pm} &= \frac{\xi\omega_2 + \gamma\omega_1 \pm \sqrt{(\xi\omega_2 - \gamma\omega_1)^2 + 4\kappa^2\omega_1\omega_2}}{2(\xi\gamma - \kappa^2)} = \\ &= \frac{\frac{\omega_2}{\gamma} + \frac{\omega_1}{\xi} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_2}{\gamma} - \frac{\omega_1}{\xi}\right)^2 + 4\frac{\kappa^2}{\xi\gamma}\frac{\omega_1}{\xi}\frac{\omega_2}{\gamma}}}{2\left(1 - \frac{\kappa^2}{\xi\gamma}\right)}, \quad (53) \end{aligned}$$

где введены обозначения $\kappa = V_{12} = V_{21}$, $\xi = 1 + V_{11}$, $\gamma = 1 + V_{22}$. Можно заметить, что именно κ отвечает за взаимодействие между модами, при $\kappa = 0$ собственные числа системы просто масштабируются. Условие ИТ можно записать как $\tilde{\omega}_- = \tilde{\omega}_+$, или $(\xi\omega_2 - \gamma\omega_1)^2 + 4\kappa^2\omega_1\omega_2 = 0$. На рисунке 16 приведен пример поверхностей вещественных и мнимых частей собственных частот возмущенной системы в зависимости от параметров системы. Используемые значения параметров указаны на рисунке. Видно, что пересечение вещественных частей на плоскости $\kappa = 0$ переходит в антипересечение на плоскости $\kappa = 0.04$, обратный переход наблюдается во мнимых частях.

На рисунке выделена ИТ, которая появляется при определенных значениях параметров κ и h .



$$\omega_1(h) = 2.2h + 6 - 0.2i, \quad \omega_2(h) = 6h + 0.3 - 0.6i, \quad \xi = 1, \quad \gamma = 1$$

Рисунок 16 – Поверхностей вещественных и мнимых частей собственных частот возмущенной системы в зависимости от параметров системы

Получение значений κ , ξ и γ требуют ввода скалярного произведения и нормировки в пространстве собственных мод. Чтобы показать, что эта модель может описывать поведение собственных мод в окрестности ИТ, эти параметры были подобраны при помощи методов численной оптимизации. Считая, что в области обратных высот резонатора h_0/h от 1.52 до 1.55 параметры меняются слабо, их можно считать константами. Собственные частоты изначального резонатора можно аппроксимировать линейными зависимостями

$$\omega_1(h_0/h) = (2.224724 - i0.023396) \cdot h_0/h + 6.846411 - i0.242355, \quad (54)$$

$$\omega_2(h_0/h) = (6.302923 - i0.221363) \cdot h_0/h + 0.606508 - i0.31179. \quad (55)$$

Параметры, получившиеся в результате оптимизации, и максимальные относительные ошибки при использовании этих параметров представлены в таблице 1. Получаемые по формуле (53) вещественные и мнимые части собственных чисел нанесены на рисунок 15.

Таблица 1 – Параметры модели и максимальная относительная ошибка модели при использовании этих параметров для различных значений α

α	ξ	γ	κ	Макс. отн. ошибка, %
1.000	1	1	0	0.0044
0.902	0.993783 +i0.000728	1.000755 -i0.001037	0.017148 -i0.001479	0.0534
0.890	0.992245 +i0.000903	1.000909 -i0.001272	0.019272 -i0.001574	0.0113

В разделе было показано основное свойство ИТ, а именно корневой характер зависимости расщепления собственных частот от параметров системы. В подразделе 3.2 был продемонстрирован способ получения из пересечения собственных мод антипересечения. В разделе также был описан и продемонстрирован пример получения ИТ при нарушении симметрии системы. Для описания поведения собственных частот в области ИТ в подразделе 3.4 была предложена феноменологическая модель.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были рассмотрены системы представляющие собой компактный открытый акустический резонатор различной группы симметрии. Были рассмотрены механизмы и условия появления ИТ и КССК с точки зрения свойств симметрии собственных мод системы. Понимание того, по какому неприводимому представлению преобразуются моды системы, позволяет без моделирования предсказать, возможно ли наблюдать ИТ или КССК в таких системах и, если да, то при каких условиях. Основные результаты работы следующие:

- а) приведена классификация собственных мод в соответствии с неприводимыми представлениями группы симметрии резонатора, по которым они преобразуются,
- б) продемонстрировано КССК по механизму Фридриха-Винтгена. Показано, что возникновение КССК по этому механизму связано не с конкретной формой резонатора, а со свойствами симметрии его собственных мод,
- в) продемонстрирован общий подход к получению ИТ в компактном акустическом резонаторе любой точечной или предельной точечной группы симметрии путем нарушения его симметрии:
 - 1) необходимо найти пересечение двух собственных мод, преобразующихся по разным неприводимым представлениям изначальной группы симметрии;
 - 2) необходимо подобрать такое нарушение симметрии, при котором два неприводимых представления исходной группы перейдут в одно неприводимое представление новой группы (раздел 3.3);
 - 3) необходимо подобрать значение параметра нарушения симметрии, при котором реализуется ИТ;
- г) была предложена феноменологическая модель, основанная на использовании в оптике инструменте разложения по резонансным состояниям. Модель хорошо описывает поведение собственных мод в окрестности ИТ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ma G., Sheng P. Acoustic metamaterials: From local resonances to broad horizons // *Sci. Adv.* — 2016. — Т. 2, № 2. — e1501595. — ISSN 2375-2548. — DOI: 10.1126/sciadv.1501595.
2. Cummer S. A., Christensen J., Al A. Controlling sound with acoustic metamaterials // *Nat. Rev. Mater.* — 2016. — Т. 1, № 16001. — С. 1–13. — ISSN 2058-8437. — DOI: 10.1038/natrevmats.2016.1.
3. Staude I., Schilling J. Metamaterial-inspired silicon nanophotonics // *Nat. Photonics.* — 2017. — Май. — Т. 11. — С. 274–284. — ISSN 1749-4893. — DOI: 10.1038/nphoton.2017.39.
4. Overvig A. C. [и др.]. Dielectric metasurfaces for complete and independent control of the optical amplitude and phase // *Light Sci. Appl.* — 2019. — Окт. — Т. 8, № 92. — С. 1–12. — ISSN 2047-7538. — DOI: 10.1038/s41377-019-0201-7.
5. Cheng Y. [и др.]. Ultra-sparse metasurface for high reflection of low-frequency sound based on artificial Mie resonances // *Nat. Mater.* — 2015. — Т. 14. — С. 1013–1019. — ISSN 1476-4660. — DOI: 10.1038/nmat4393.
6. Hsu C. W. [и др.]. Bound states in the continuum // *Nat. Rev. Mater.* — 2016. — Т. 1, № 16048. — С. 1–13. — ISSN 2058-8437. — DOI: 10.1038/natrevmats.2016.48.
7. Кошелев К. Л. [и др.]. Связанные состояния непрерывного спектра в фотонных структурах // *Усп. физ. наук.* — 2023. — Т. 193, № 5. — С. 528–553. — DOI: 10.3367/UFNr.2021.12.039120.
8. Lyapina A. A. [и др.]. Bound states in the continuum in open acoustic resonators // *J. Fluid Mech.* — 2015. — Т. 780. — С. 370–387. — ISSN 0022-1120. — DOI: 10.1017/jfm.2015.480.
9. Bulgakov E. N., Sadreev A. F. Bound states in the continuum in photonic waveguides inspired by defects // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Т. 78, № 7. — С. 075105. — ISSN 2469-9969. — DOI: 10.1103/PhysRevB.78.075105.
10. Bulgakov E. N., Sadreev A. F. Bloch bound states in the radiation continuum in a periodic array of dielectric rods // *Phys. Rev. A.* — 2014. — Т. 90, № 5. — С. 053801. — ISSN 2469-9934. — DOI: 10.1103/PhysRevA.90.053801.

11. Marinica D. C., Borisov A. G., Shabanov S. V. Bound States in the Continuum in Photonics // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — T. 100, № 18. — С. 183902. — ISSN 1079-7114. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.183902.
12. Bogdanov A. A. [и др.]. Bound states in the continuum and Fano resonances in the strong mode coupling regime // *Advanced Photonics*. — 2019. — T. 1, № 1. — С. 016001–016001.
13. Miri M.-A., Al A. Exceptional points in optics and photonics // *Science*. — 2019. — T. 363, № 6422. — eaar7709. — ISSN 0036-8075. — DOI: 10.1126/science.aar7709.
14. Heiss W. D. The physics of exceptional points // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2012. — T. 45, № 44. — С. 444016. — ISSN 1751-8121. — DOI: 10.1088/1751-8113/45/44/444016.
15. Wiersig J. Sensors operating at exceptional points: General theory // *Phys. Rev. A*. — 2016. — T. 93, № 3. — С. 033809. — ISSN 2469-9934. — DOI: 10.1103/PhysRevA.93.033809.
16. Wiersig J. Review of exceptional point-based sensors // *Photonics Res.* — 2020. — T. 8, № 9. — С. 1457–1467. — ISSN 2327-9125. — DOI: 10.1364/PRJ.396115.
17. Moiseyev N. *Non-Hermitian Quantum Mechanics*. — Cambridge, England, UK : Cambridge University Press, 2011. — ISBN 978-0-52188972-8. — DOI: 10.1017/CBO9780511976186.
18. El-Ganainy R. [и др.]. Non-Hermitian physics and PT symmetry // *Nat. Phys.* — 2018. — T. 14. — С. 11–19. — ISSN 1745-2481. — DOI: 10.1038/nphys4323.
19. Schindler J. [и др.]. Experimental study of active LRC circuits with \mathcal{PT} symmetries // *Phys. Rev. A*. — 2011. — T. 84, № 4. — С. 040101. — ISSN 2469-9934. — DOI: 10.1103/PhysRevA.84.040101.
20. Fleury R., Sounas D., Al A. An invisible acoustic sensor based on parity-time symmetry // *Nat. Commun.* — 2015. — T. 6, № 5905. — С. 1–7. — ISSN 2041-1723. — DOI: 10.1038/ncomms6905.

21. Achilleos V. [и др.]. Non-Hermitian acoustic metamaterials: Role of exceptional points in sound absorption // *Phys. Rev. B.* — 2017. — Т. 95, № 14. — С. 144303. — ISSN 2469-9969. — DOI: 10.1103/PhysRevB.95.144303.
22. Valero A. C. [и др.]. Magnetolectric Exceptional Points in Isolated All-Dielectric Nanoparticles // *arXiv.* — 2022. — DOI: 10.48550/arXiv.2205.05735. — eprint: 2205.05735.
23. Pierce A. D. *Basic Linear Acoustics* // *Springer Handbook of Acoustics.* — New York, NY, USA : Springer, New York, NY, 2014. — С. 29–115. — DOI: 10.1007/978-1-4939-0755-7_3.
24. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика.* — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. — С. 736.
25. Солимено С., Крозиньяни Б., Ди Порто П. *Дифракция и волноводное распространение оптического излучения: Пер. с англ.* — М.: Мир, 1989. — ISBN 5-03-001021-1.
26. Sommerfeld A. Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. // *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* — 1912. — Т. 21. — С. 309–352.
27. Hanson G. W., Yakovlev A. B. *Operator Theory for Electromagnetics.* — New York, NY, USA : Springer. — ISBN 978-1-4757-3679-3.
28. Muljarov E. A., Weiss T. Resonant-state expansion for open optical systems: generalization to magnetic, chiral, and bi-anisotropic materials // *Opt. Lett.* — 2018. — Т. 43, № 9. — С. 1978–1981. — ISSN 1539-4794. — DOI: 10.1364/OL.43.001978.
29. Christopoulos T. [и др.]. On the calculation of the quality factor in contemporary photonic resonant structures // *Opt. Express.* — 2019. — Т. 27, № 10. — С. 14505–14522. — ISSN 1094-4087. — DOI: 10.1364/OE.27.014505.
30. Петрашень М. И., Трифонов Е. Д. *Применение теории групп в квантовой механике.* — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1967. — С. 308.
31. Zee A. *Group Theory in a Nutshell for Physicists.* — Princeton, NJ, USA : Princeton University Press, 2016. — ISBN 978-0-69116269-0.

32. Lavrov P. M., Radchenko O. V., Tyutin I. V. Jacobi-type identities in algebras and superalgebras // *Theor. Math. Phys.* — 2014. — Т. 179, № 2. — С. 550–558. — ISSN 1573-9333. — DOI: 10.1007/s11232-014-0161-2.
33. Hergert W., Geilhufe R. M. *Group Theory in Solid State Physics and Photonics: Problem Solving with Mathematica.* — Weinheim, Germany : Wiley, 2018. — ISBN 978-3-52741301-0.
34. Шубников А. В. О работах Пьера Кюри в области симметрии // *Усп. физ. наук.* — 1956. — Т. 59, № 8. — С. 591–602. — DOI: 10.3367/UFNr.0059.195608b.0591.
35. Павлов П. В., Хохлов А. Ф. *Физика твердого тела: Учеб.* — М.: Высш. шк., 2000. — С. 494.
36. Поклонский Н. А. *Точечные группы симметрии: Учеб. Пособие.* — Мн.: БГУ, 2003. — С. 494. — ISBN 985-445-965-9.
37. Gladyshev S., Frizyuk K., Bogdanov A. Symmetry analysis and multipole classification of eigenmodes in electromagnetic resonators for engineering their optical properties // *Phys. Rev. B.* — 2020. — Т. 102, № 7. — С. 075103. — ISSN 2469-9969. — DOI: 10.1103/PhysRevB.102.075103.
38. Tsimokha M. [и др.]. Acoustic resonators: Symmetry classification and multipolar content of the eigenmodes // *Phys. Rev. B.* — 2022. — Т. 105, № 16. — С. 165311. — ISSN 2469-9969. — DOI: 10.1103/PhysRevB.105.165311.
39. Williams E. G. *Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography.* — London, England, UK : Academic Press, 1999. — ISBN 978-0-12753960-7.
40. Blanco M. A., Flrez M., Bermejo M. Evaluation of the rotation matrices in the basis of real spherical harmonics // *J. Mol. Struct. THEOCHEM.* — 1997. — Т. 419, № 1. — С. 19–27. — ISSN 0166-1280. — DOI: 10.1016/S0166-1280(97)00185-1.
41. Mie G. Beitrge zur Optik trber Medien, speziell kolloidaler Metallungen // *Ann. Phys.* — 1908. — Т. 330, № 3. — С. 377–445. — ISSN 0003-3804. — DOI: 10.1002/andp.19083300302.

42. Morse P. M., Ingard K. U. *Theoretical Acoustics*. — Princeton, NJ, USA : Princeton University Press, 1986. — ISBN 978-0-69102401-1.
43. Zhao Q. [и др.]. Mie resonance-based dielectric metamaterials // *Mater. Today*. — 2009. — Т. 12, № 12. — С. 60–69. — ISSN 1369-7021. — DOI: 10.1016/S1369-7021(09)70318-9.
44. Liu X. [и др.]. Isotropic Mie resonance-based metamaterial perfect absorber // *Appl. Phys. Lett.* — 2013. — Т. 103, № 3. — ISSN 0003-6951. — DOI: 10.1063/1.4813914.
45. Akimov Y. K. Fields of Application of Aerogels (Review) // *Instruments and Experimental Techniques*. — 2003. — Т. 46, № 3. — С. 287–299. — ISSN 1608-3180. — DOI: 10.1023/A:1024401803057.
46. Neuman J. von, Wigner E. Uber merkwrdige diskrete Eigenwerte. Uber das Verhalten von Eigenwerten bei adiabatischen Prozessen // *Physikalische Zeitschrift*. — 1929. — Т. 30. — С. 467–470.
47. Prodanovi N. [и др.]. Bound states in continuum: Quantum dots in a quantum well // *Phys. Lett. A*. — 2013. — Т. 377, № 34. — С. 2177–2181. — ISSN 0375-9601. — DOI: 10.1016/j.physleta.2013.05.051.
48. Sadreev A. F., Bulgakov E. N., Rotter I. Bound states in the continuum in open quantum billiards with a variable shape // *Phys. Rev. B*. — 2006. — Т. 73, № 23. — С. 235342. — ISSN 2469-9969. — DOI: 10.1103/PhysRevB.73.235342.
49. Huang L. [и др.]. Sound trapping in an open resonator // *Nat. Commun.* — 2021. — Август. — Т. 12, № 4819. — С. 1–7. — ISSN 2041-1723. — DOI: 10.1038/s41467-021-25130-4.
50. Craster R. V., Kaplunov J. *Dynamic Localization Phenomena in Elasticity, Acoustics and Electromagnetism*. — Wien, Austria : Springer Vienna, 2013. — ISBN 978-3-70911619-7.
51. Deriy I. [и др.]. Bound States in the Continuum in Compact Acoustic Resonators // *Phys. Rev. Lett.* — 2022. — Февр. — Т. 128, № 8. — С. 084301. — ISSN 1079-7114. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.128.084301.

52. Sadrieva Z. F. [и др.]. Transition from Optical Bound States in the Continuum to Leaky Resonances: Role of Substrate and Roughness // ACS Photonics. — 2017. — Т. 4, № 4. — С. 723–727. — DOI: 10.1021/acsp Photonics.6b00860.
53. Hemmati H., Magnusson R. Resonant Dual-Grating Metamembranes Supporting Spectrally Narrow Bound States in the Continuum // Adv. Opt. Mater. — 2019. — Т. 7, № 20. — С. 1900754. — ISSN 2195-1071. — DOI: 10.1002/adom.201900754.
54. Friedrich H., Wintgen D. Interfering resonances and bound states in the continuum // Phys. Rev. A. — 1985. — Т. 32, № 6. — С. 3231–3242. — ISSN 2469-9934. — DOI: 10.1103/PhysRevA.32.3231.
55. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учебное пособие для вузов. В 10 т. Т. III. Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. — С. 768. — ISBN 5-02-014421-5.
56. Sauvan C. [и др.]. Normalization, orthogonality, and completeness of quasinormal modes of open systems: the case of electromagnetism [Invited] // Opt. Express. — 2022. — Т. 30, № 5. — С. 6846–6885. — ISSN 1094-4087. — DOI: 10.1364/OE.443656.
57. Ladich F., Winkler H. Acoustic communication in terrestrial and aquatic vertebrates // J. Exp. Biol. — 2017. — Т. 220, № 13. — С. 2306–2317. — ISSN 0022-0949. — DOI: 10.1242/jeb.132944.
58. Xiao Z. [и др.]. Enhanced Sensing and Nondegraded Thermal Noise Performance Based on \mathcal{PT} -Symmetric Electronic Circuits with a Sixth-Order Exceptional Point // Phys. Rev. Lett. — 2019. — Т. 123, № 21. — С. 213901. — ISSN 1079-7114. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.213901.
59. Rosa M. I. N., Mazzotti M., Ruzzene M. Exceptional points and enhanced sensitivity in \mathcal{PT} -symmetric continuous elastic media // J. Mech. Phys. Solids. — 2021. — Т. 149. — С. 104325. — ISSN 0022-5096. — DOI: 10.1016/j.jmps.2021.104325.
60. Park J.-H. [и др.]. Symmetry-breaking-induced plasmonic exceptional points and nanoscale sensing // Nat. Phys. — 2020. — Т. 16. — С. 462–468. — ISSN 1745-2481. — DOI: 10.1038/s41567-020-0796-x.

61. Chen W. [и др.]. Exceptional points enhance sensing in an optical microcavity // *Nature*. — 2017. — Т. 548. — С. 192–196. — ISSN 1476-4687. — DOI: 10.1038/nature23281.
62. Pichugin K., Sadreev A., Bulgakov E. Exceptional Points through Variation of Distances between Four Coaxial Dielectric Disks // *Photonics*. — 2021. — Т. 8, № 11. — С. 460. — ISSN 2304-6732. — DOI: 10.3390/photonics8110460.
63. Kato T. *Perturbation theory for linear operators*. — Berlin, Germany : Springer, 1966. — ISBN 978-3-662-12678-3.
64. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов*. — М.: Мир, 1972.
65. Ashida Y., Gong Z., Ueda M. Non-Hermitian physics // *Adv. Phys.* — 2020. — Т. 69, № 3. — С. 249–435. — ISSN 0001-8732. — DOI: 10.1080/00018732.2021.1876991.
66. Heiss W. D. Chirality of wavefunctions for three coalescing levels // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2008. — Т. 41, № 24. — С. 244010. — ISSN 1751-8121. — DOI: 10.1088/1751-8113/41/24/244010.
67. Cao H., Wiersig J. Dielectric microcavities: Model systems for wave chaos and non-Hermitian physics // *Rev. Mod. Phys.* — 2015. — Т. 87, № 1. — С. 61–111. — ISSN 1539-0756. — DOI: 10.1103/RevModPhys.87.61.
68. Miroljubov M. A. [и др.]. Spectral Characteristics and Time Dynamics of Tunable Acoustic Resonators in the Strong Coupling Regime // *JETP Lett.* — 2021. — Т. 113, № 8. — С. 547–553. — ISSN 1090-6487. — DOI: 10.1134/S0021364021080099.
69. Maksimov D. N. [и др.]. Coupled mode theory for acoustic resonators // *Wave Motion*. — 2015. — Т. 56. — С. 52–66. — ISSN 0165-2125. — DOI: 10.1016/j.wavemoti.2015.02.003.