

Содержание

1	Введение	2
2	Описание метода	8
2.1	Основная идея метода	8
2.2	Случай цепочки в вакууме	12
2.3	Случай цепочки вблизи волокна	13
3	Периодическая цепочка двухуровневых атомов в вакууме	17
3.1	Спектры сечения рассеяния	17
3.2	Дисперсионная зависимость для конечной цепочки двухуровневых атомов в вакууме	19
4	Периодическая цепочка двухуровневых атомов вблизи волокна	23
4.1	Дисперсионные зависимости	23
4.2	Спектры сечения рассеяния	26
5	Дополнение: вычисление функции Грина	29

1 Введение

В последние десятилетия большое внимание исследователей из области оптики привлекают так называемые гибридные квантовые системы, в которых объединены с одной стороны типичные объекты исследования для квантовой оптики - ансамбли ультрахолодных атомов, NV-центры в алмазе или квантовые точки; и различные нанотонные структуры с другой. Подобные системы интересны прежде всего тем, что позволяют изучать взаимодействие света и вещества на уровне одиночных частиц: фотонов и атомов. Помимо академического интереса к фундаментальным вопросам взаимодействия света и вещества, такие системы рассматриваются также в качестве основы для реализации протокола передачи и обработки квантовой информации. В таком случае отдельные атомоподобные системы обычно рассматриваются как объекты, хранящие и обрабатывающие информацию, к которым возможно обращаться индивидуально как к отдельным точкам квантово-информационной сети [1], а фотоны используются для передачи информации между узлами на значительные расстояния.

Естественным требованием к подобной системе является необходимость обеспечения эффективной связи между фотонами и атомами. На данный момент было предложено множество возможных подходов для ее реализации. Это, например, локализация атомов вблизи резонаторов с большой добротностью и осуществление режима сильной связи [2], фокусировка оптических полей на масштабах порядка резонансного сечения поглощения одиночного атома [3], [4], [5] или использование плотных атомных ансамблей и когерентной связи с ними [6].

Существует и схема, использующая ультрахолодные ансамбли атомов, локализованные вблизи оптического субволнового нановолокна, идея которой впервые была предложена в работе [7] и затем реализована экспериментально, продемонстрировав тем самым свою перспективность в различных приложениях [8], [15]. Такая система интересна тем, что, во-первых, атомы в данном случае находятся от поверхности волокна на расстоянии меньшем, чем длина волны

излучения, резонансного соответствующему атомному переходу, что обеспечивает эффективность взаимодействия атома с излучением, распространяющимся по волокну. Как следствие, для возбужденного атома, находящегося в непосредственной близости от поверхности такого волокна, существует значительная вероятность ($\sim 10\%$) излучить фотон в моду волокна за счет эффекта Пёрселла, что является важным аспектом в экспериментах, поскольку позволяет осуществлять детектирование излучения, испущенного единственным атомом. Во-вторых, возможно осуществлять перенос возбуждения от одного атома к другому через моду волокна, то есть посредством дальнего диполь-дипольного взаимодействия, что может рассматриваться как основа для построения квантово-информационной сети.

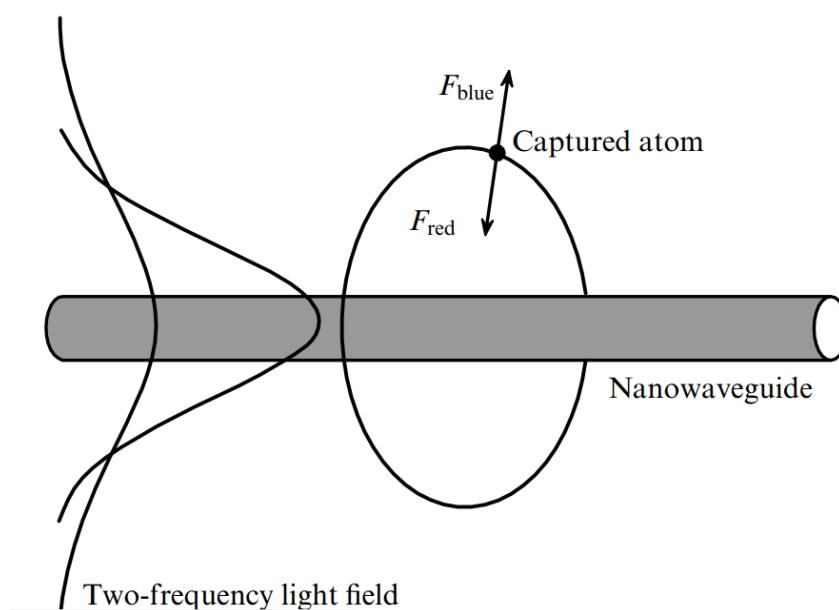


Рис. 1: Общая идея локализации атомов двухчастотным световым полем, описанная в [7].

Изготовление оптических нановолокон и исследование их свойств было впервые проведено в работе [10], где также обсуждаются области их возможного применения. Свойства такого волокна зависят от

его радиуса ρ_c и длины волны распространяющегося по нему излучения λ . Если выполняется условие на V -параметр $V = k\rho_c\sqrt{n_1^2 - n_2^2} < 2.405$, где n_1, n_2 - коэффициенты преломления волокна и окружающего его материала, то волокно поддерживает только одну фундаментальную моду HE_{11} . При этом та часть излучения, которая находится вне волокна, достаточно быстро затухает при удалении от его поверхности и при типичных параметрах для нановолокна ($n_1 \approx 1.447, n_2 = 1, \rho_c/\lambda \approx 5$) характерный масштаб локализации излучения существенно меньше длины волны света. Это, в свою очередь, обеспечивает достаточно высокую интенсивность поля при малой мощности вводимого в волокно излучения и делает возможным осуществление сильной связи атома с излучением моды волокна.

Кроме того, необычные оптические свойства нановолокон делают возможным реализацию локализации атомов вблизи его поверхности оптическими полями. Наиболее популярной техникой здесь является так называемая схема локализации атомов двухчастотным световым полем, основная идея которой впервые была предложена в работе [11] для плоской границы раздела диэлектрик-вакуум, а затем предложена и для случая цилиндрического волокна круглого сечения [12], (рис. 1).

Амплитуда поля вне оптического нановолокна для фундаментальной моды описывается модифицированной функцией Бесселя (функцией Макдональда) $K_0(k_\rho\rho)$, где $k_\rho = \sqrt{k^2 - \beta^2}$, β - постоянная распространения фундаментальной моды, которая может быть найдена из дисперсионного соотношения. Оптический потенциал, который чувствует атом, для случая, если частоты полей отстроены от атомного резонанса на значительную по сравнению с естественной шириной уровня величину, может быть выражен как $U_i = \hbar\Omega_i^2/\Delta_i$, здесь Ω_i - частота Раби соответствующего поля i , Δ_i - величина отстройки от атомного резонанса. Ясно, что от того, в какую частотную область отстроено поле, зависит направление радиальной составляющей силы, действующей на атом: отстроенное в красную область поле является притягивающим к поверхности волокна, а в синюю - отталкивающим. Это приводит к появлению минимума в суммарном потенциале, положение и глубину которого возможно контролиро-

вать, изменяя интенсивности полей и их частотные отстройки. При этом суммарный потенциал, который чувствует атом, будет отталкивающим вблизи поверхности волокна и притягивающим на значительных расстояниях, что потенциально делает возможным захват свободно пролетающих вблизи волокна атомов. Помимо этого, атом также взаимодействует с атомами поверхности волокна посредством силы Ван-дер-Ваальса [12], наличие которой приводит к изменению характера испускаемого атомами излучения. Тем не менее, оказывается возможным подобрать параметры полей так, что потенциальный минимум находится на достаточном расстоянии от поверхности волокна, чтобы не учитывать взаимодействие Ван-дер-Ваальса.

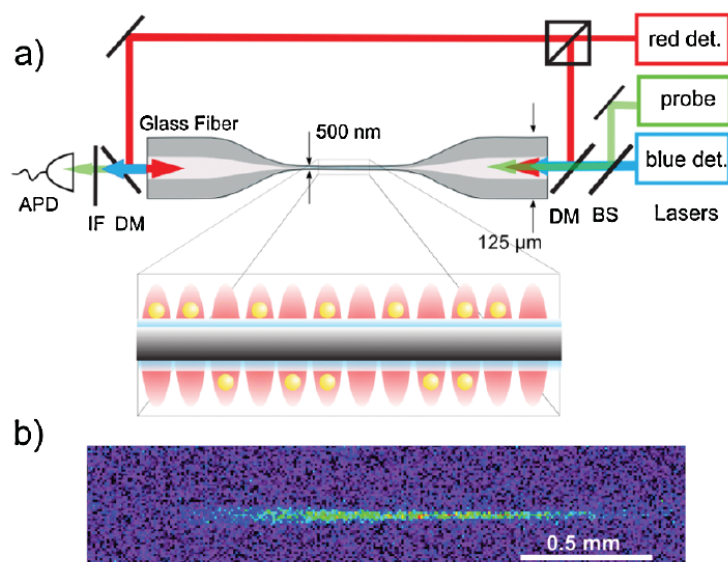


Рис. 2: (а) Общая схема установки эксперимента по локализации атомов Cs вблизи диэлектрического волокна. Резонансный атомному переходу лазер, отмеченный зеленым, использовался для зондирования атомов. (б) Флюоресценция атомов вблизи поверхности волокна, снятая ПЗС камерой.

Захват атома в минимум потенциала напрямую оказывается маловероятным, поскольку характерная глубина потенциала (≈ 100 мК) оказывается сравнимой или меньше, чем характерные кинети-

ческие энергии атомов в облаке. Таким образом, для осуществления захвата атома необходим некоторый диссипативный процесс и на данный момент известно о двух основных механизмах захвата: это фотоассоциация атома с поверхностью, то есть переход возбужденного атома в связанное состояние [13], а также механизм, основанный на столкновительном переносе энергии [14], когда столкновение двух возбужденных атомов приводит к тому, что один из них переходит в высоковозбужденное состояние, а второй - в основное, теряя при этом кинетическую энергию.

Первая экспериментальная реализация захвата атомов вблизи нановолокна была продемонстрирована в работе [15] для атомов Cs . Отстроенный в красную область лазер формировал стоящую волну на поверхности волокна для создания одномерного периодического потенциала (рис. 2). В следующие пару лет экспериментальные работы были посвящены совершенствованию схемы проведения эксперимента, после чего проводились эксперименты по остановке света за счет эффекта электромагнитно-индуцированной прозрачности (ЭИП) [16], [17], а также наблюдению Брэгговской диффракции от цепочки атомов [18], [19].

С точки зрения изучения оптических свойств одномерных систем, состоящих из атомов, стоит отметить работу [20], в которой рассматривалась одномерная периодическая система из плоскостей, по каждой из которых атомы были распределены равномерно с определенной плотностью, что может быть достигнуто путем создания стоячей волны лазерным излучением, в этой работе изучалось формирование запрещенных зон в такой системе в зависимости от того, в какую область от резонанса (красную или синюю) отстроена частота лазерного излучения, пленящего атомы, а также от числа атомных плоскостей и плотности атомов в каждом слое. При этом поля считались классическими, а задача решалась самосогласованным образом с помощью метода матриц переноса.

Аналогичный по сути подход в дальнейшем использовался и в работе [21], посвященной периодической цепочке из атомов, находящейся вблизи нановолокна. Здесь в качестве такой "плоскости" фактически рассматривается одиночный атом, а коэффициентами отражения и

прохождения для каждого слоя связываются с темпом спонтанной эмиссии в направлении вперед и назад, соответственно. При этом все излучение, которое испускают атомы и которое не попадает в волокно, считается потерями на рассеяние. Плюсом данного подхода является то, что он не затронул относительно машинного времени, отчасти феноменологический и позволяет, например, учитывать влияние различных механизмов уширения на спектральные характеристики. Именно поэтому данный метод хорошо подходит для описания экспериментальных данных, о чем можно судить по работам [18], [19]. Однако такой подход является не вполне корректным, поскольку он учитывает лишь взаимодействие атомов друг с другом через волноводную моду, в то время как взаимодействие через излучающие моды волокна и вакуумные моды поля игнорируются. Это приближение является вполне разумным, если расстояние между атомами порядка или больше резонансной длины волны $\Delta z \geq \lambda_0$, когда атомы друг относительно друга находятся в дальнем поле. Если же характерное расстояние между атомами сравнимо или меньше λ_0 , влияние игнорируемых вкладов может быть существенным.

Именно исследованию влияния диполь-дипольного взаимодействия на оптические свойства системы и посвящена данная работа. В качестве спектральной характеристики мы будем рассматривать полное сечение рассеяния одиночного фотона на системе двухуровневых атомов, образующих периодическую цепочку, которая в одном случае будет находиться в вакууме (рис. 3, а), в другом - вблизи диэлектрического волокна (рис. 3, б), радиус которого будет составлять $\rho_c = \lambda_0/2$, где λ_0 - длина волны излучения, резонансного атомному переходу, при этом атомы будут находиться на расстоянии $\Delta \rho = 0.3\lambda_0$ от поверхности волокна. Указанные характерные расстояния приблизительно соответствуют параметрам для типичного эксперимента. В следующем разделе рассматриваются общие идеи используемого метода расчета.

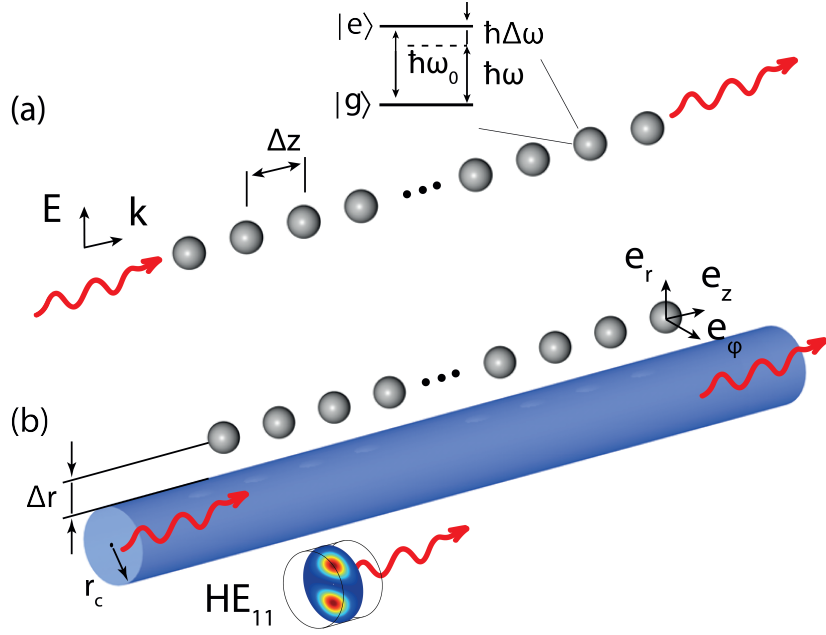


Рис. 3: Схема системы, рассматриваемой в работе, для случая, когда система атомов находится в вакууме (а) и вблизи диэлектрического волокна (б). (а) На атомы налетает фотон с линейной поляризацией, волновой вектор которого сонаправлен с осью цепочки. (б) На системе атомов рассеивается фотон из фундаментальной моды HE_{11} .

2 Описание метода

2.1 Основная идея метода

Процесс рассеяния мы будем описывать с точки зрения микроскопической теории, используя при этом метод T -матрицы или матрицы переходов [22], которая определяет амплитуды вероятности переходов между различными начальными и конечными состояниями системы. Начальное состояние системы в данном случае

$$|i\rangle = |g_1, \dots, g_N\rangle \times |1_\mu\rangle, \quad (1)$$

для которого все N атомов находятся в основном состоянии g , а в моде μ поля имеется один фотон. Нас будет интересовать элемент T -матрицы, соответствующий рассеянию фотона обратно в ту же моду $|f\rangle = |i\rangle$.

Рассмотрим полный Гамильтониан системы, состоящий из невозмущенной части \hat{H}_0 и возмущения \hat{V}

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{V}, \\ \hat{H}_0 &= \hat{H}_A + \hat{H}_F, \\ \hat{V} &= - \sum_{a=1}^N \hat{\mathbf{d}}_a \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_a),\end{aligned}\tag{2}$$

где \hat{H}_A и \hat{H}_F - это части невозмущенного Гамильтониана, отвечающие атомной и полевой системам, соответственно, $\hat{\mathbf{d}}_a$ - оператор дипольного момента атома под номером a , $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_a)$ - поле в точке, соответствующей позиции этого атома. Оператор возмущения \hat{V} мы записали в виде, соответствующем рассмотрению задачи в дипольном приближении, применение которого оправдано, поскольку характерные размеры атомов значительно меньше длины волны излучения, резонансного соответствующему переходу $r_{atom} \ll \lambda_0$.

Тогда T матрицу можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned}\hat{T} &= \hat{V} + \hat{V} \hat{G}(E + i\eta) \hat{V}, \\ \hat{G}(E + i\eta) &= \frac{1}{E - \hat{H} + i\eta},\end{aligned}\tag{3}$$

где $\hat{G}(E)$ - оператор резольвенты полного Гамильтониана \hat{H} , а η - бесконечно малая положительная величина. Поскольку мы рассматриваем диагональный элемент матрицы переходов T_{ii} , то первое слагаемое в (3) обнуляется, а внешние операторы \hat{V} во втором слагаемом физически соответствуют поглощению фотона из моды μ и испусканию его обратно в ту же моду, поэтому имеет смысл записать эти операторы с учетом приближения вращающейся волны в виде

$$\hat{V} = - \sum_{a=1}^N \left(\hat{\mathbf{d}}_a^+ \hat{\mathbf{E}}^-(\mathbf{r}_a) + \hat{\mathbf{d}}_a^- \hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}_a) \right), \quad (4)$$

где $\hat{\mathbf{d}}_a^{+/-} \sim \hat{\sigma}_a^{+/-}$, а $\hat{\mathbf{E}}^{+/-}(\mathbf{r}_a)$ - положительно/отрицательно-частотная части полного оператора поля.

Принимая во внимание вид начального и конечного состояний (1) и вид оператора \hat{T} , можно сказать, что оператор Резольвенты $\hat{G}(z)$ необходимо рассчитать на состояниях, для которых один из N атомов возбужден, а поле в вакуумном состоянии, то есть необходимо найти матрицу следующего оператора

$$\hat{P} \hat{G}(z + i\eta) \hat{P},$$

$$\hat{P} = \sum_{c=1}^N |g_1, \dots, e_c, \dots, g_N\rangle \times |\{0\}\rangle \langle \{0\}| \times \langle g_N, \dots, e_c, \dots, g_1|, \quad (5)$$

где \hat{P} - оператор-проектор на подпространство соответствующих состояний. Для такого спроецированного оператора возможно получить форму, имеющую достаточно простой физический смысл, для чего можно воспользоваться определением оператора резольвенты $(z - \hat{H}_0 - \hat{V})\hat{G}(z) = 1$

$$\begin{aligned} \hat{P}(E - \hat{H})\hat{P}[\hat{P}\hat{G}(E)\hat{P}] - \hat{P}\hat{V}\hat{Q}[\hat{Q}\hat{G}(E)\hat{P}] &= \hat{P}, \\ -\hat{Q}\hat{V}\hat{P}[\hat{P}\hat{G}(E)\hat{P}] + \hat{Q}(E - \hat{H})\hat{Q}[\hat{Q}\hat{G}(E)\hat{P}] &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\hat{Q} = 1 - \hat{P}$ - проектор на подпространство состояний, дополняющий состояния из \hat{P} до полного набора. Первое выражение было получено умножением слева и справа определения $\hat{G}(E)$ на \hat{P} , а второе - умножением слева на \hat{Q} , а справа на \hat{P} с использованием того факта, что оператор \hat{H}_0 диагонален. Данная пара алгебраических уравнений имеет две неизвестных: операторы $\hat{Q}\hat{G}(E)\hat{P}$ и интересующий нас $\hat{P}\hat{G}(E)\hat{P}$, откуда находим

$$\hat{P}\hat{G}(E)\hat{P} = \hat{P} \frac{1}{E - \hat{H}_0 - \hat{\Sigma}(E)} \hat{P},$$

$$\hat{\Sigma}(E) = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}(E + i\eta)\hat{V}, \quad (7)$$

здесь оператор $\hat{\Sigma}$ - оператор сдвига уровней. Как видно из выражения выше, этот оператор дает нам поправки к невозмущенным энергиям \hat{H}_0 , обусловленные взаимодействием. Теперь вся задача свелась к нахождению матрицы оператора сдвига и для этого мы прибегнем к следующим двум приближениям, часто используемым в подобных задачах.

Суть первого рассматриваемого приближения в том, что мы будем считать этот оператор медленной функцией своего аргумента и потому $\hat{\Sigma}(E) \approx \hat{\Sigma}(E_0)$, где $E_0 = \hbar\omega_0$, что является возможным, пока поправки, которые дает оператор сдвига уровней, малы по сравнению с характерными значениями энергий невозмущенных состояний E_0 . Это так, поскольку ожидаемые поправки составляют величины порядка собственной ширины верхнего атомного уровня γ_0 , в то время как $\omega_0 \gg \gamma_0$.

Рассматривая разложение оператора $\Sigma(E)$ по степеням \hat{V} , мы ограничимся первым неисчезающим порядком, что в данном случае соответствует тому, что $\hat{\Sigma}(E) = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0(E + i\eta)\hat{V}$, где $\hat{G}_0(E) = (z - \hat{H}_0)^{-1}$. В этом и заключается суть второго приближения.

Нас интересуют матричные элементы оператора сдвига уровней следующего вида $\langle e_a | \hat{\Sigma}(E_0) | e_b \rangle = \Sigma_{ab}(E_0)$, где $|e_a\rangle$ - состояния, где только атом a возбужден, а поле в вакуумном состоянии. Они бывают двух типов: диагональные по индексам, нумерующим атомы, и недиагональные. Недиагональные элементы, когда в начальном состоянии возбужден один атом, а в конечном - другой, отвечают за перенос возбуждения от одного атома к другому, т.е. за диполь-дипольное взаимодействие между атомами в процессе рассеяния. Диагональные же матричные элементы отвечают за конечное время жизни возбужденного состояния и сдвиг Лэмба за счет взаимодействия каждого атома в отдельности с модами поля.

Когда матрица оператора $\hat{\Sigma}(E_0)$ найдена, остается только получить знаменатель (7) и вычислить матрицу, обратную к данной, найдя таким образом матрицу оператора $\hat{P}\hat{G}(E)\hat{P}$ и, значит, саму матрицу переходов T .

2.2 Случай цепочки в вакууме

Рассмотрим далее особенности применения описанного выше метода к задаче рассеяния одиночного фотона на системе атомов в вакууме. Для описания поля в этом случае мы воспользуемся стандартной формой его разложение в базисе плоских волн

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mu} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} (i\mathbf{e}_{\mu}\hat{a}_{\mu}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + h.c.), \quad (8)$$

где V - объем квантования, $\mu = (\mathbf{k}, s)$ - индекс, характеризующий моду, включающий в себя волновой вектор фотона \mathbf{k} , а также поляризацию $s = (1, 2)$

Для данного случая матричные элементы оператора $\hat{\Sigma}(E_0)$ имеет вид [23]

$$\Sigma_{ab}(E_0) = -4\pi k_0^2 \mathbf{d}_{\mathbf{a}}^* \mathbf{G}_0(\mathbf{r}_{\mathbf{a}}, \mathbf{r}_{\mathbf{b}}, \omega_0) \mathbf{d}_{\mathbf{b}}, \quad (9)$$

здесь $k_0 = \omega_0/c$, а $\mathbf{G}_0(\mathbf{r}_{\mathbf{a}}, \mathbf{r}_{\mathbf{b}}, \omega_0)$ - классическая функция Грина электрического поля, имеющая аналитическое выражение

$$\mathbf{G}_0(\mathbf{r}_{\mathbf{a}}, \mathbf{r}_{\mathbf{b}}, \omega_0) = \left(\mathbf{I} + \frac{1}{k_0^2} \nabla_{\mathbf{r}} \nabla_{\mathbf{r}'} \right) \frac{e^{ikR}}{4\pi R}, \quad (10)$$

где $R = |\mathbf{r}_{\mathbf{a}} - \mathbf{r}_{\mathbf{b}}|$ - расстояние между атомами, \mathbf{I} - единичная матрица.

Отметим, что для диагональных матричных элементов, когда $a = b$ и, следовательно, $\mathbf{r}_{\mathbf{a}} = \mathbf{r}_{\mathbf{b}}$, мы можем записать матричный элемент в виде $\Sigma_{aa}(E_0) = \hbar \left(\Delta_L - i\frac{\gamma}{2} \right)$, где Δ_L - сдвиг Лэмба, а γ

- обратное время жизни возбужденного состояния. Мнимая часть функции Грина стремится при этом к конечной величине и отвечает за γ , а действительная часть, отвечающая за сдвиг Лэмба, дает расходимость. Для того, чтобы избавиться от этой расходимости, будем считать, что сдвиг Лэмба Δ_L уже включен в определение частоты перехода ω_0 .

Далее мы можем найти диагональный элемент матрицы переходов $T_{ii}(E)$ и связать его с полным сечением рассеяния $\sigma_{tot}(E) \sim -Im T_{ii}(E)$ [24]. Введем нормированное сечение следующим образом

$$\sigma_N(E) = \frac{Im T_{ii}(E)}{Im T_{ii}^1(E_{res})}, \quad (11)$$

где $T_{ii}^1(E_{res})$ матричный элемент, соответствующий рассеянию одиночного фотона на одном атоме для резонансного значения частоты $E_{res} = \hbar\omega_{res}$, при которой сечение рассеяния на одном атоме достигает максимума.

2.3 Случай цепочки вблизи волокна

Для того, чтобы описать рассеяние фотона из моды волокна на системе атомов, мы модифицируем подход, который был описан выше. Для начала мы рассмотрим внешние операторы возмущения в выражении (3), которые, как отмечалось выше, отвечают за поглощение фотона из моды и за испускание его обратно в ту же моду, соответственно. Для описания квантового поля волноводной моды волокна воспользуемся подходом, аналогичным описанному в [25]

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda} \mathbf{E}_{\lambda}(\mathbf{r}) \hat{a}_{\lambda} + h.c., \quad (12)$$

где $\mathbf{E}_{\lambda}(\mathbf{r})$ - амплитуда классического поля моды λ , которая может быть записан как

$$\mathbf{E}_\lambda(\mathbf{r}) = i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_\lambda}{L}}\tilde{\mathbf{E}}_\lambda(\rho, \phi)e^{if\beta_\lambda z + im\phi}, \quad (13)$$

где β_λ - постоянная распространения для данной моды, которую можно найти из дисперсионного соотношения, $\tilde{\mathbf{E}}_\lambda(\rho, \phi)$ характеризует поперечный профиль поля, L - нормировочная длина, а f и m определяют направление распространения и вращения поляризации фотона, соответственно, и принимают значения ± 1 . Электрическое поле периодически в направлении оси z , а условие периодичности можно записать в виде $\beta_i L = 2\pi n_i$, где n_i - положительные целые числа. При этом функция поперечного профиля поля должна быть нормирована согласно

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty |\tilde{\mathbf{E}}_\lambda(\rho, \phi)|^2 d\phi \rho d\rho = 1. \quad (14)$$

Такая нормировка соответствует наличию одного фотона в моде $\lambda = (\beta, f, m)$. Поскольку явное выражение для функции поперечного профиля поля имеет достаточно громоздкий вид, то здесь не приводится явно. Явно она приведена, например, в работах [25], [26].

Второй шаг заключается в том, чтобы вычислить матричные элементы оператора $\hat{\Sigma}$, должным образом описав диполь-дипольное взаимодействие между атомами в присутствии волокна. Для этого мы воспользуемся подходом, достаточно подробно описанным в [27], [28]. Данный метод в общем случае позволяет описывать вторично квантованное поле в задачах, где в самом общем случае рассматриваются поглощающие и диспергирующие среды. В рамках данного метода мы можем записать Гамильтониан нашей системы в виде

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{V}, \\
\hat{H}_A &= \sum_a \hbar\omega_0 \hat{\sigma}_a^+ \hat{\sigma}_a^-, \\
\hat{H}_F &= \int d\mathbf{r}' \int_0^\infty d\omega' \hbar\omega' \hat{\mathbf{f}}^\dagger(\mathbf{r}', \omega') \mathbf{f}(\mathbf{r}', \omega'), \\
\hat{V} &= - \sum_a \hat{\mathbf{d}}_a \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_a),
\end{aligned} \tag{15}$$

где $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{r}', \omega')$, $\hat{\mathbf{f}}^\dagger(\mathbf{r}', \omega')$ - векторные локальные операторы уничтожения и рождения, которые отвечают следующим коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned}
[\hat{f}_i(\mathbf{r}', \omega'), \hat{f}_k^\dagger(\mathbf{r}, \omega)] &= \delta_{ik} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \delta(\omega' - \omega), \\
[\hat{f}_i(\mathbf{r}', \omega'), \hat{f}_k(\mathbf{r}, \omega)] &= 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Положительно-частотная часть оператора электрического поля имеет вид

$$\hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}) = i\sqrt{4\hbar} \int d\mathbf{r}' \int_0^\infty d\omega' \frac{\omega'^2}{c^2} \sqrt{\varepsilon_I(\mathbf{r}', \omega')} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega') \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{r}', \omega'), \tag{17}$$

где $\varepsilon_I(\mathbf{r}', \omega')$ - мнимая часть диэлектрической функции рассматриваемой среды, $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega')$ - полная классическая функция Грина электрического поля, которая может быть представлена в виде

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \mathbf{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) + \mathbf{G}_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega), \tag{18}$$

$\mathbf{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ - вакуумная функция Грина, а $\mathbf{G}_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ - рассеянная часть функции Грина, которую возможно найти путем разложения по векторным гармоникам, что более подробно описано в последнем разделе.

Основная суть данного метода заключается в том, что в общем случае для поглощающих и диспергирующих сред невозможно выполнить разложение поля по стационарным собственным модам системы, как это обычно делается для случая квантования свободного

электромагнитного поля в вакууме. В данном случае вся информация о среде содержится в классической функции Грина для поля, при этом соответствующие операторы рождения и уничтожения $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{r}', \omega')$ и $\hat{\mathbf{f}}^\dagger(\mathbf{r}', \omega')$ являются локальными, то есть отвечают за элементарное возбуждение среды в данной точке пространства и для данной частоты, что соответствующим образом отражается на коммутационных соотношениях (16). Несмотря на то, что в рассматриваемой задаче материал среды является непоглощающим, а его дисперсией мы пренебрегаем в силу того, что нас интересует крайне узкий спектральный диапазон вблизи резонансной частоты ω_0 , данный подход дает понятный по физическому смыслу и простой ответ для интересующей нас величины, а именно для матричного элемента оператора $\hat{\Sigma}(E)$, который можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \langle f | \hat{\Sigma}(E) | i \rangle &= \sum_{|\alpha\rangle, |\beta\rangle} \langle f | \hat{V} | \alpha \rangle \langle \alpha | \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i\eta} | \beta \rangle \langle \beta | \hat{V} | i \rangle, \\ |i\rangle &= |e_b, g_a\rangle \times |\{0\}\rangle, \\ |f\rangle &= |g_b, e_a\rangle \times |\{0\}\rangle, \end{aligned} \quad (19)$$

где для начального и конечного состояний для удобства мы ограничились рассмотрением только двух атомов a и b . Промежуточные состояния $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ имеют одиночное возбуждение для полевой подсистемы, а для атомной - либо оба атома a и b в основном, либо в возбужденном состоянии

$$\begin{aligned} &|e_b, e_a\rangle \times \hat{\mathbf{f}}^\dagger(\mathbf{r}', \omega') |\{0\}\rangle, \\ &|g_b, g_a\rangle \times \hat{\mathbf{f}}^\dagger(\mathbf{r}', \omega') |\{0\}\rangle. \end{aligned} \quad (20)$$

Вычисление соответствующего матричного элемента подробно описано в [29], здесь же мы приведем лишь окончательный ответ

$$\langle f | \hat{\Sigma}(E_0) | i \rangle = -4\pi \frac{\omega_0^2}{c^2} \mathbf{d}_a^* \mathbf{G}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, \omega_0) \mathbf{d}_b. \quad (21)$$

Отметим, что для случая, когда $\mathbf{r}_b = \mathbf{r}_a$, действительная часть вакуумной функции Грина расходится, что соответствует бесконечной величине Лэмбовского сдвига из-за взаимодействия с вакуумными модами поля. Этот вклад, как и прежде, мы перенормируем, то есть будем считать, что он уже включен в определение частоты перехода ω_0 . Тем не менее, $Re[\mathbf{G}_s(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_a, \omega_0)]$ есть конечная величина, что дает нам сдвиг частоты перехода вследствие взаимодействия возбужденного атома a с модами волокна. Мнимая часть функции Грина отвечает за спонтанный распад возбужденного атома, а рассеянная часть функции Грина приводит к изменению темпа спонтанной эмиссии одиночного атома.

Теперь, когда мы получили матрицу оператора $\hat{\Sigma}(E)$, мы можем найти интересующий нас матричный элемент T_{ii} и нормированное сечение (11), соответственно. При наличии волокна знаменатель (11) вычисляется для случая, когда расстояние от атома до поверхности волокна $\Delta\rho$ такое же, как и расстояние для всех атомов в цепочке. В этом случае E_{res} отличается от $\hbar\omega_0$, поскольку, как было отмечено выше, взаимодействие волокна приводит к наличию сдвига Лэмба.

3 Периодическая цепочка двухуровневых атомов в вакууме

3.1 Спектры сечения рассеяния

Применим описанный выше подход к задаче рассеяния одиночного фотона, волновой вектор \mathbf{k} которого сонаправлен с осью Oz , вдоль которой расположены атомы цепочки с периодом Δz . Дипольные моменты соответствующих переходов в атомах будем считать направленными перпендикулярно Oz и сонаправленными с вектором поляризации налетающего фотона \mathbf{e}_μ . Нас будет интересовать то, как меняется спектр сечения в зависимости от периода в такой цепочке, что представлено на рис. 4.

Можно заметить, что при изменении периода, вблизи значений, равных $m\lambda_0/2$, где m - целое число, характер профиля сечения рас-

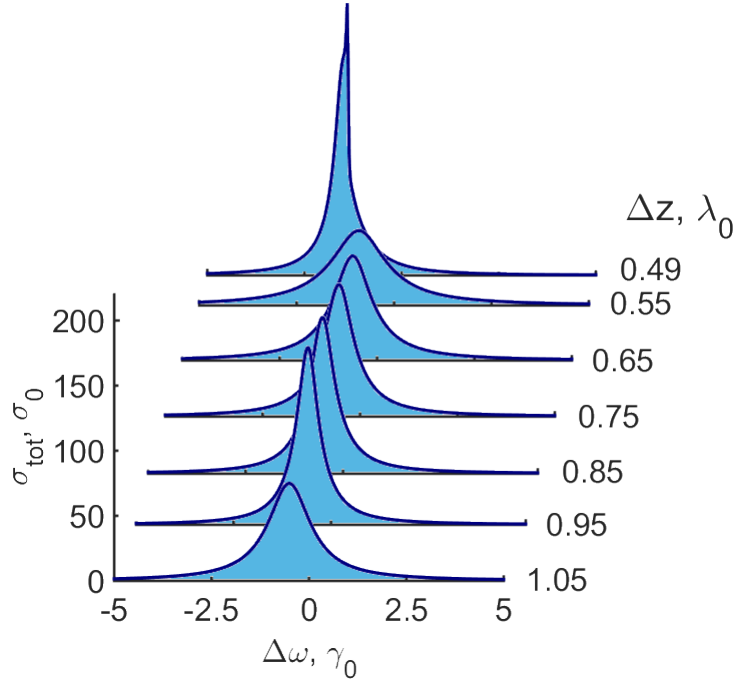


Рис. 4: Нормированные спектры сечений рассеяния на цепочке из $N = 100$ атомов в зависимости от отстройки частоты налетающего фотона от атомного резонанса $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ для различных периодов цепочки Δz . Все частоты измеряются в характерных единицах обратного собственного времени жизни возбужденного состояния изолированного атома γ_0 , а расстояния в единицах $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$.

сеяния изменяется достаточно резко, что особенно заметно вблизи первой такой особенности. Для периода $\Delta z = 0.49\lambda_0$ спектр сечения имеет достаточно большую амплитуду в максимуме и относительно узкий профиль, в то время как для $\Delta z = 0.55\lambda_0$ максимум сечения резко падает и профиль уширяется. В дальнейшем при увеличении периода профиль изменяется монотонным образом вплоть до следующей особенности $\Delta z = 1.0\lambda_0$, вблизи которой спектр ведет себя аналогичным образом, как и при $\Delta z = 0.5\lambda_0$.

Для того, чтобы объяснить подобное поведение спектров сечения нам необходимо рассмотреть собственные состояния такой системы,

а именно дисперсионные зависимости для такой цепочки и радиационные потери.

3.2 Дисперсионная зависимость для конечной цепочки двухуровневых атомов в вакууме

Задача о дисперсии собственных мод в одномерной цепочке из диполей была рассмотрена, например, в [30], в контексте исследования оптических свойств цепочки плазмонных наночастиц. Для получения дисперсионных зависимостей в нашем случае мы применим аналогичный подход, рассмотрев следующую задачу на собственные значения

$$\Sigma(E_0)\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i, \quad (22)$$

где $\Sigma(E_0)$ - матрица соответствующего оператора, \mathbf{v}_i - искомые собственные вектора в базисе состояний с одиночным возбужденным атомом, λ_i - собственная частота для этого состояния. Действительная часть λ_i определяет энергию соответствующего состояния, а мнимая - радиационные потери.

Если мы пронумеруем атомы согласно их порядковой позиции в цепочке, то мы можем построить зависимости действительных частей \mathbf{v}_i от порядкового номера атома, которые будут иметь вид стоячих волн. Тогда каждой моде мы можем сопоставить число n , где $n-1$ - это количество пересечений нуля в этой зависимости, а число n мы можем связать с волновым числом k_z , соответствующим данному собственному состоянию системы согласно формуле

$$\frac{k_z}{K} = \frac{(N-2)n+1}{2N(N-1)}, \quad (23)$$

здесь $K = 2\pi/\Delta z$ - вектор обратной решетки. Например, для первой моды $n = 1$ соответствующее $k_z = \frac{\pi}{dN}$. После данной процедуры мы

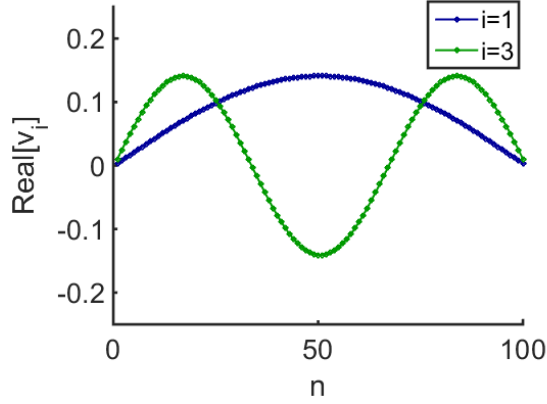


Рис. 5: Примеры профилей собственных поперечных ($\mathbf{d} \perp \mathbf{e}_z$) мод \mathbf{v}_i для $i = 1$ (синяя кривая) и $i = 3$ (зеленая кривая) в зависимости от порядкового номера атома n для цепочки из 100 атомов.

можем построить зависимости действительных и мнимых частей λ_i как функций k_z .

Для начала рассмотрим дисперсионные зависимости для поперечных мод $\mathbf{d} \perp \mathbf{e}_z$. Как видно из рис. 6, (а), когда $\Delta z < 0.50\lambda_0$, кривые дисперсии (зеленая) и радиационных потерь (красная) имеют две характерные области, разделенные световыми прямыми, которые в силу условия $\gamma_0 \ll \omega_0$ вертикальны. В первой области между световыми прямыми находятся состояния, характеризующиеся значительными потерями на излучение, во второй - вне световых прямых - состояния безызлучательные, поскольку для данных состояний $k_z > k_0$ и не существует такого направления, под которым мог бы излучиться фотон с таким k_z . Вблизи световой линии в дисперсионной зависимости наблюдается особенность в виде провала - в этой области находятся состояния, сильно взаимодействующие со светом.

Если же период $\Delta z > 0.5\lambda_0$ (рис. 6, (b)), то все состояния становятся излучающими, поскольку вся дисперсионная кривая попадает в область между световых линий и для каждого состояния существует направление, в котором оно может излучить фотон. Тем не менее, характерный вид дисперсионной кривой сохраняется и по-прежнему

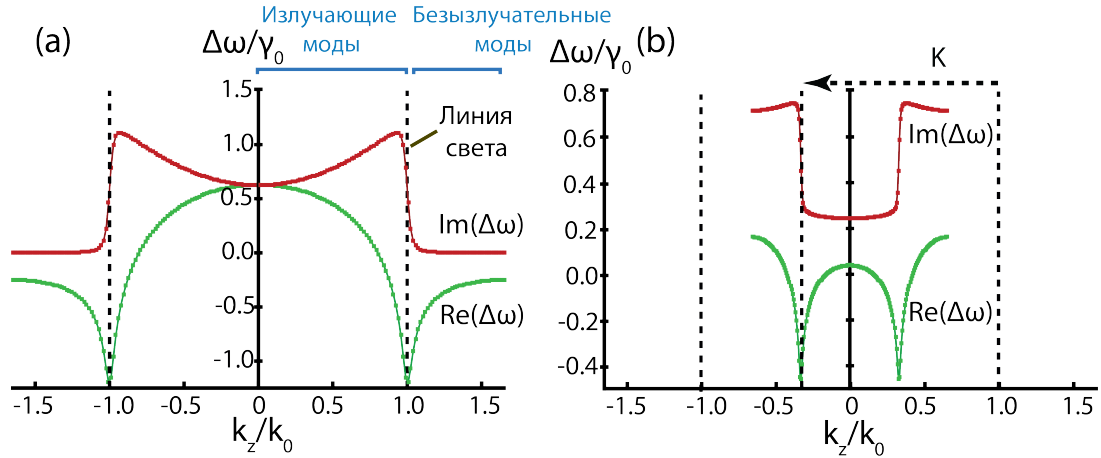


Рис. 6: Зависимости действительных (зеленая кривая) и мнимых (красная кривая) частей собственных частот для периодической цепочки из $N = 100$ атомов от величины волнового числа k_z соответствующего состояния для периодов $\Delta z = 0.30\lambda_0$ (a), и $\Delta z = 0.75\lambda_0$ (b). Дипольный момент перехода в атомах $\mathbf{d} \perp \mathbf{e}_z$

имеется две области: сильно и слабо излучающих состояний. Положение особенности в дисперсии, которая разделяет эти две области, теперь определяется исходя из закона сохранения квазиимпульса вдоль Oz : $k = k_0 - K$, поскольку вдоль этой оси система периодична. Слабоизлучающие состояния из области ближе к центру зоны имеют один канал рассеяния - излучить фотон с $k_{ph} = k_z$, соответствующий данному состоянию. Сильноизлучающие состояния ближе к краю зоны имеют два направления, в которые они могут излучить фотон: первое аналогично предыдущему случаю, а второе - излучить фотон с $k_{ph} = k_z \pm K$, поскольку для этого случая мы все еще находимся между световыми линиями.

В рассматриваемой системе также существуют и продольные моды, для которых $\mathbf{d} \parallel \mathbf{e}_z$, соответствующие кривые представлены на рис. 7. Как можно видеть из рис. 7, (a), дисперсионная кривая для продольных мод не имеет особенности вблизи пересечения со световой линией, а максимум радиационных потерь приходится на $k_z = 0$.

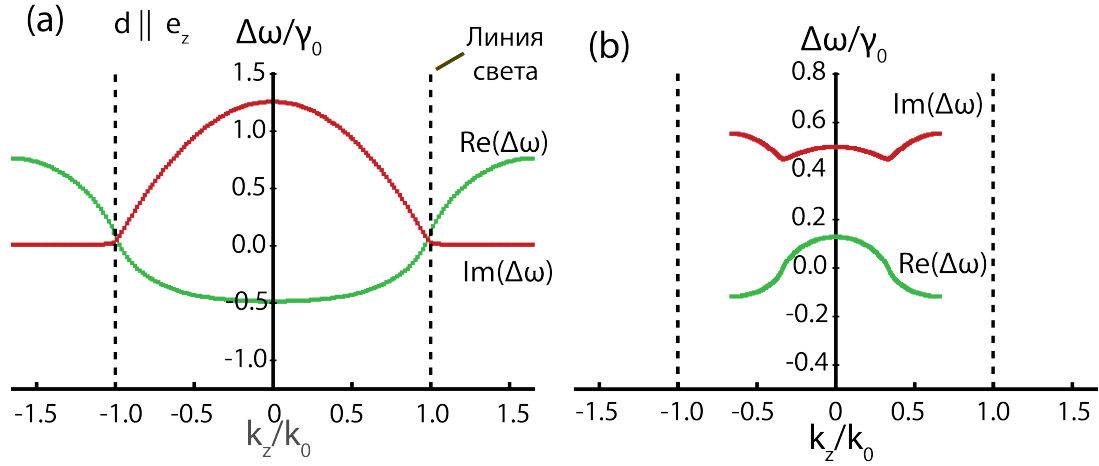


Рис. 7: Зависимости для продольных мод действительных (зеленая кривая) и мнимых (красная кривая) частей собственных частот от величины волнового числа k_z соответствующего состояния для периодов $\Delta z = 0.30\lambda_0$ (а), и $\Delta z = 0.75\lambda_0$ (б).

Причина этого заключается в характере дипольного излучения: цепочка из продольно ориентированных диполей преимущественно излучает в направлении, перпендикулярном оси цепочки и не излучает вдоль этого направления.

Теперь с помощью дисперсионных кривых можно объяснить спектры сечений. Наибольший вклад в профиль сечения для $\Delta z = 0.49\lambda_0$ (рис. 8, (а)) дают несколько состояний на краю зоны непосредственно вблизи с пересечением со световой линией (рис. 8, (б)), поскольку, как отмечалось ранее, именно эти состояния наиболее эффективно взаимодействуют со светом. Эти состояния имеют относительно большее время жизни и поэтому спектр выглядит как набор из достаточно узких пиков. Если же $\Delta z = 0.51\lambda_0$, то состояния на краю зоны становятся излучающими, как видно из (рис. 8, (с)), поскольку для этих состояний появляется второй канал рассеяния и спектр сечения уширяется.

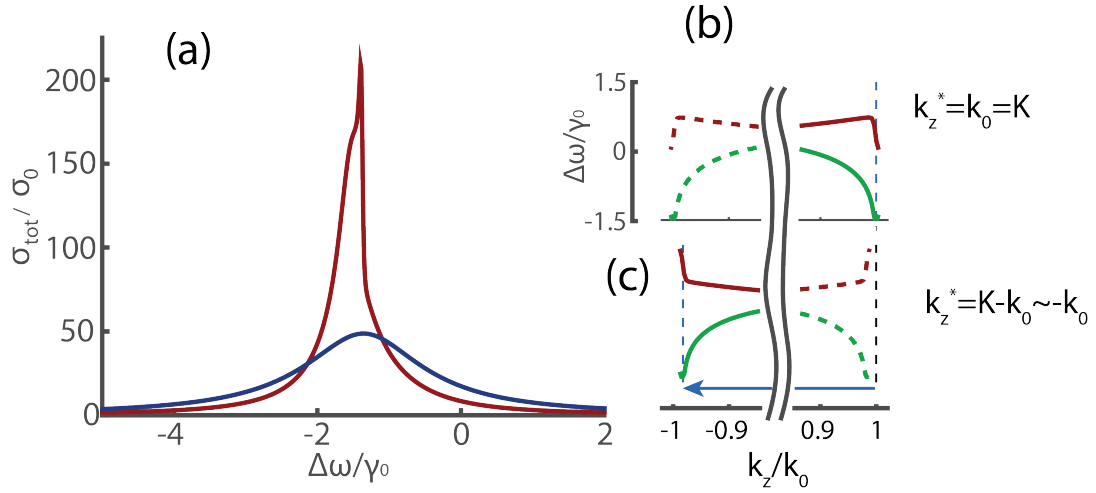


Рис. 8: Сечения рассеяния для двух периодов $\Delta z = 0.49\lambda_0$ (красная кривая), $\Delta z = 0.51\lambda_0$ (синяя кривая), а также дисперсионные зависимости и радиационные потери вблизи краев зоны для тех же периодов (b) и (c), соответственно. Дипольный момент перехода в атомах $\mathbf{d} \perp \mathbf{e}_z$.

4 Периодическая цепочка двухуровневых атомов вблизи волокна

4.1 Дисперсионные зависимости

Рассмотрим далее, как изменяются дисперсионные зависимости и потери на излучение для случая, когда цепочка находится вблизи диэлектрического нановолокна. Для этого случая имеет смысл рассматривать три возможные поляризации собственных мод в системе: когда дипольные моменты соответствующих переходов в атомах параллельны ортам в цилиндрической системе координат, соответственно $\mathbf{d} \parallel \mathbf{e}_\rho$, \mathbf{e}_ϕ , \mathbf{e}_z . Как можно видеть из рис. 9, (a), для поперечных мод, когда $\mathbf{d} \parallel \mathbf{e}_\rho$, в дисперсионной зависимости появляется вторая особенность в месте пересечения кривой с дисперсионной зависимостью для фундаментальной моды HE_{11} , которая также, в силу условия $\gamma_0 \ll \omega_0$, вертикальна в данной масштабе. Вблизи этой точ-

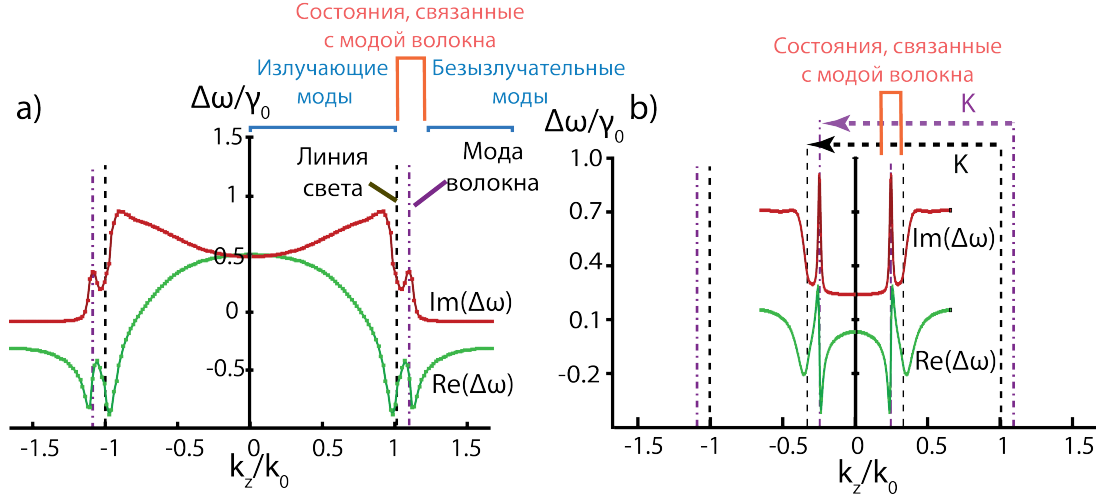


Рис. 9: Дисперсионные зависимости (красная кривая) и радиационные потери (зеленая) для поперечных мод ($\mathbf{d} \parallel \mathbf{e}_\rho$) цепочки из $N = 100$ двухуровневых атомов, находящихся вблизи диэлектрического нановолокна на расстоянии $\Delta\rho = 0.3\lambda_0$ для периодов $\Delta z = 0.30\lambda_0$ (a) и $\Delta z = 0.75\lambda_0$ (b). Радиус волокна $\rho_c = 0.25\lambda_0$, диэлектрическая проницаемость материала волокна $\epsilon = 2.1$, расстояние от поверхности волокна до атомов в цепочке $\Delta\rho = 0.3\lambda_0$.

ки находятся состояния, эффективно взаимодействующие с модой волокна, что выражается наличием пика в этой области для радиационных потерь.

Ранее уже отмечалось, что наличие волокна приводит к появлению дальнедействующего диполь-дипольного взаимодействия между атомами через его фундаментальную моду HE_{11} , и потому при увеличении периода характерный пик в радиационных потерях сохраняется (рис. 9, (b)). Можно сказать, что имеется сильная связь между некоторыми коллективными состояниями атомов и фотоном в волокне, причем сила этой связи растет с увеличением числа атомов в цепочке, как можно видеть из рис. 10, что выражается в росте максимума радиационных потерь (a) и увеличением величины характерного расщепления между состояниями в этой области (b).

Также можно отметить, что положение особенности, отвечающей

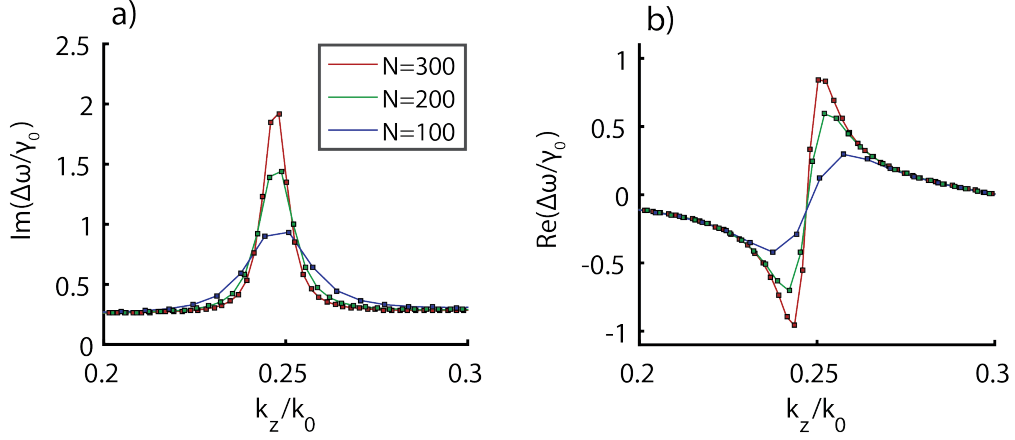


Рис. 10: Мнимые (а) и действительные (б) части собственных частот для поперечных мод с направлением дипольного момента перехода $\mathbf{d} \parallel \mathbf{e}_\rho$ для различного числа атомов для периода $\Delta z = 0.75\lambda_0$. Другие параметры аналогичны указанным на рис. 9.

взаимодействию атомов через вакуумные моды поля в точности не соответствует точке пересечения прямой с дисперсией фотона в вакууме, что особенно хорошо заметно по рис. 9, б. Причина заключается в том, что помимо фундаментальной моды имеются утекающие (радиационные) моды волокна, для которых $k_z \in \mathbb{C}$, $\text{Re } k_z < k_0$ и взаимодействие между атомами через эти моды вносит некоторую поправку в положение этой точки.

Кривые для двух оставшихся поляризаций представлены на рис. 11. Для поперечных мод с поляризацией $\mathbf{d} \parallel \mathbf{e}_\phi$, зависимости выглядят аналогичным случаю $\mathbf{d} \parallel \mathbf{e}_\rho$ образом, за исключением того, что характерные величины потерь для состояний, связанных с волноводной модой, меньше и это является следствием более слабой связи между атомами для данной ориентации дипольных моментов. Для продольных мод (рис. 11, (c) и (d)), в отличие от случая цепочки в вакууме, фотон, распространяющийся от атома к атому, не поперечен, и, как следствие, вблизи k_0 , k_{fib} есть некоторые особенности, которые для рассматриваемого числа атомов ($N = 100$) являются слабо выраженными.

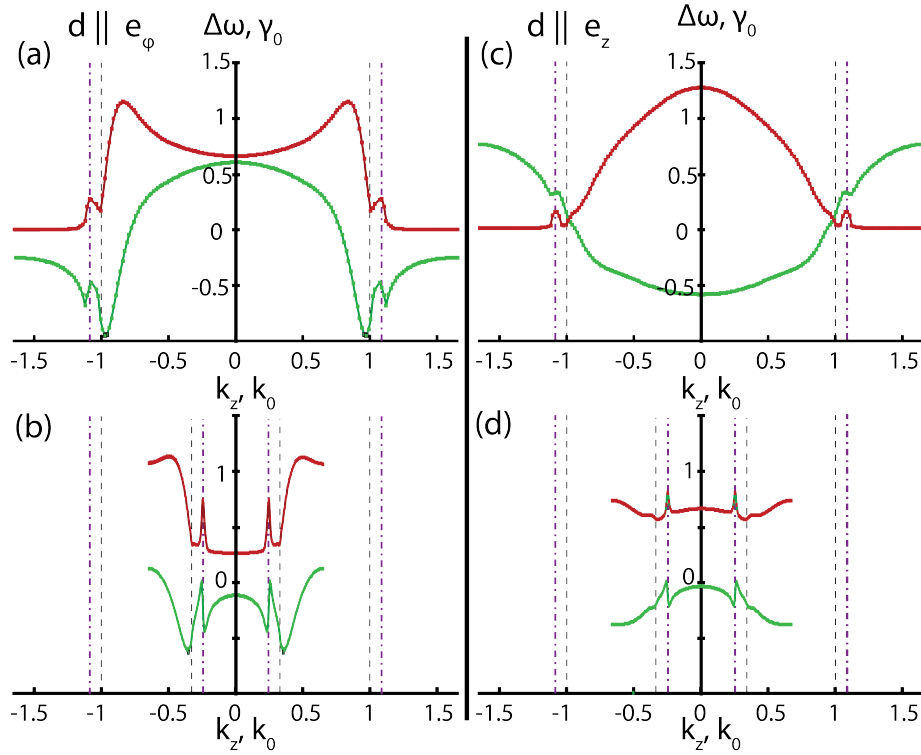


Рис. 11: Дисперсионные зависимости (красная кривая) и радиационные потери (зеленая) для цепочки двухуровневых атомов, находящихся вблизи диэлектрического нановолокна на расстоянии $\Delta\rho = 0.3\lambda_0$ для периодов $\Delta z = 0.30\lambda_0$ (a,c) и $\Delta z = 0.75\lambda_0$ (b,d) и двух поляризаций $\mathbf{d}||\mathbf{e}_\phi$ (a,b) и $\mathbf{d}||\mathbf{e}_z$ (c,d)

4.2 Спектры сечения рассеяния

Рассмотрим теперь как наличие волокна изменит вид спектральной зависимости сечения рассеяния. Мы остановимся на случае, когда дипольный момент перехода в атомах $\mathbf{d}||\mathbf{e}_\rho$, поскольку, как мы выяснили, сила диполь-дипольного взаимодействия между атомами при данной ориентации самая сильная и, значит, что характерные изменения в спектрах можно будет наблюдать для меньшего числа атомов при такой ориентации. Как можно видеть из рис. 12, (a) в центральной области спектра появляется провал ($\Delta z = 0.60/0.75/1.05\lambda_0$).

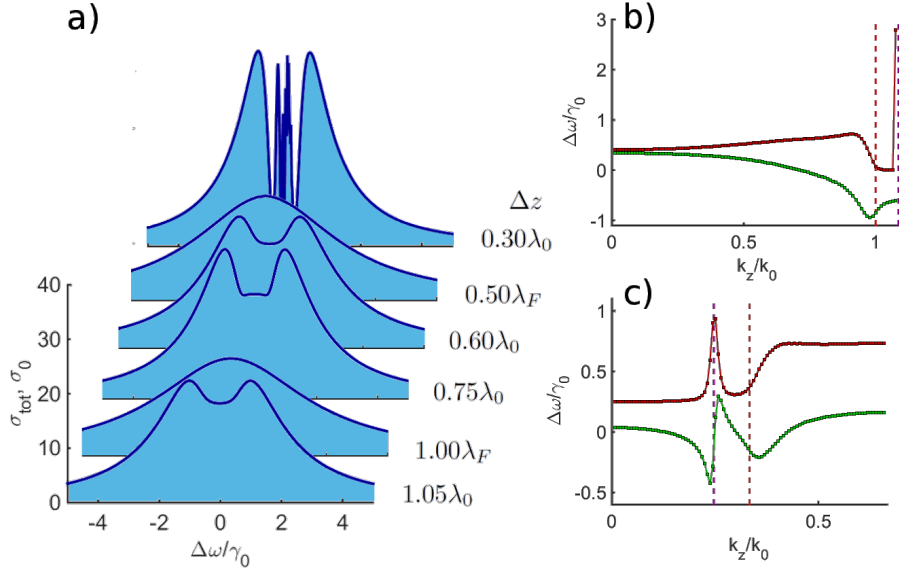


Рис. 12: Нормированные спектры сечений рассеяния в зависимости от отстройки частоты налетающего фотона (а) моды HE_{11} от атомного резонанса $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ для различных периодов Δz цепочки из 100 атомов, при этом ориентация дипольного момента для соответствующего перехода в атомах $\mathbf{d} \parallel \mathbf{e}_\rho$. Здесь $\lambda_F = 2\pi/\beta$. Графики (b) и (c) - дисперсионные зависимости и радиационные потери для периодов $0.50\lambda_F$ и $0.75\lambda_0$ соответственно.

Его наличие вызвано тем, что основной вклад в сечение рассеяния дают состояния, находящиеся в непосредственной близости от точки k_{fib} на дисперсионной зависимости. В этой области (рис. 12, (c)) дисперсия линейна и практически вертикальна в данном масштабе, что говорит о малой плотности состояний.

Если же период цепочки $\Delta z = m\lambda_F/2$, то спектр сечения представляет из себя значительно уширенный лоренциан. Для таких периодов край зоны попадает на дисперсионную зависимость для фундаментальной моды волокна HE_{11} , и вблизи этой точки появляется сильно излучающее состояние (рис. 12, (b)), рассеяние на котором и дает подобный профиль спектра. Вспомним, что собственные состояния в данной системе являются суперпозициями базисных состоя-

ний, для которых какой-либо из N атомов цепочки возбужден (5), а зависимость действительной и мнимой части собственного вектора, соответствующего данному состоянию (рис. 13), дает нам информацию об относительной фазе между ними, которая для ближайших атомов в данном случае составляет величину $\Delta\phi \approx \pi$. Помимо этого, для фотона, распространяющегося от одного атома к ближайшему, набег фазы также составляет $\Delta\phi_{ph} \approx \pi$, что приводит к конструктивной интерференции и усилению спонтанной эмиссии для такого коллективного состояния. Данный эффект хорошо известен как эффект сверхизлучения Дике [31], а такие состояния в зарубежной литературе имеют название *timed Dicke states*.

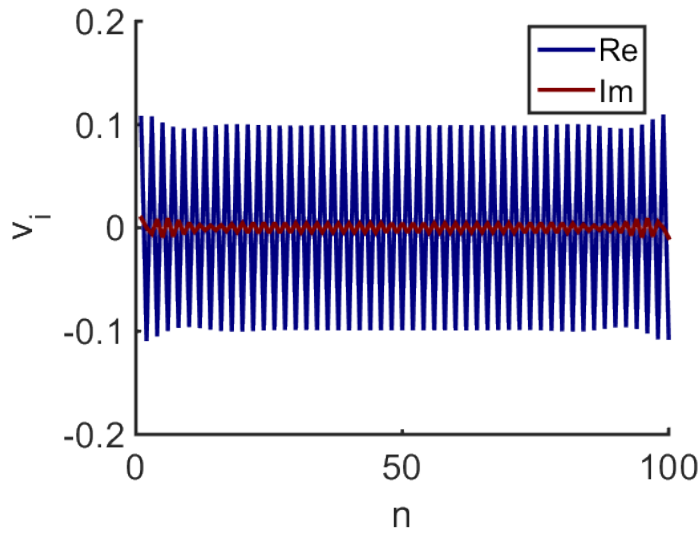


Рис. 13: Действительная и мнимая части профиля собственной моды v_i для состояния на краю зоны ($i = 100$), при параметрах, указанных на рис. 12, (b).

Для минимального из рассматриваемых периодов ($\Delta z = 0.30\lambda_0$), как видно из рис. 12, (a), сила взаимодействия между атомами становится настолько велика, что наблюдаются пики в спектре, соответствующие отдельным собственным состояниям.

Заключение

В представленной работе была рассмотрена микроскопическая задача рассеяния одиночного фотона на системе двухуровневых атомов, которые упорядочены в одномерную периодическую цепочку. При этом первая часть работы посвящена случаю, когда цепочка из атомов находится в вакууме. Для этого случая было показано, что изменение периода цепочки вблизи значений $\Delta z = m\lambda_0/2$ приводит к резкому изменению характера, а полученные дисперсионные зависимости и зависимости для радиационных потерь позволили связать это с изменением времени жизни собственных состояний системы на краю зоны.

Во второй части рассматривалась задача рассеяния фотона из фундаментальной моды волокна на аналогичной цепочке атомов, находящихся вблизи него. Из дисперсионных зависимостей было продемонстрировано, что наличие волокна приводит к появлению коллективных атомных состояний, связанных с модой волокна. Причем при достаточно большом числе атомов ($N \sim 100$) реализуется режим сильной связи, когда наличие этих состояний заметным образом проявляется в спектре сечений рассеяния. В случае, если период кратен половине длины волны, связанной с постоянной распространения волноводной моды, профиль представляет из себя уширенный лоренциан, что связано с появлением сильно излучающего состояния на краю зоны. При прочих значениях периода в профиле сечения наблюдается провал в центральной области, наличие которого вызвано малой плотностью состояний вблизи для этой частотной области.

5 Дополнение: вычисление функции Грина

Для нахождения полной функции Грина уравнения

$$(-k_0^2 + \nabla \times \nabla \times) \mathbf{G}_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \mathbf{I}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (24)$$

мы воспользуемся двумя методами: методом суперпозиции и методом векторных функций, детали использования которых достаточно подробно описаны в [32], [33]. Идея первого из этих методов заключается в том, что полная функция Грина может быть представлена в виде суммы

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \mathbf{G}_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) + \mathbf{G}_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega), \quad (25)$$

где $\mathbf{G}_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ - однородная часть функции грина, $\mathbf{G}_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ - неоднородная часть. Однородная часть при этом отвечает за взаимодействие источника и приемника напрямую и она отлична от нуля тогда, когда и источник и приемник находятся по одну сторону от границы раздела двух сред: материала среды волокна и остального пространства. Если же источник и приемник находятся по разные стороны от границы раздела, то однородная часть обнуляется и остается только неоднородная часть, в которой и содержится вся информация о свойствах структуры как рассеивателя.

Однородная часть функции Грина имеет хорошо известную аналитическую форму

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_h^{Cart}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) &= (\mathbf{I} + \frac{1}{k^2} \nabla_{\mathbf{r}} \otimes \nabla_{\mathbf{r}'}) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega), \\ G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) &= \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \end{aligned} \quad (26)$$

где \mathbf{I} - единичный тензор. Для получения однородной части в цилиндрических координатах достаточно совершить преобразование $\mathbf{S}(\phi) \mathbf{G}_h^{Cart}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{S}^T(\phi)$, где

$$\mathbf{S}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Несмотря на то, что однородная часть имеет аналитическую форму, для нее также необходимо иметь разложение по векторным гармоникам для того, чтобы впоследствии провести сшивку решений на

границе. Поэтому для начала рассмотрим разложение однородной части по методу векторных функций, суть которого заключается в том, что решение векторного уравнения (24) возможно получить из решения скалярного уравнения

$$\nabla^2 \psi_n(\mathbf{k}, \mathbf{r}) + k^2 \psi_n(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0 \quad (28)$$

решением которого являются функции

$$\psi_n(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = J_n(k_\rho \rho) e^{ik_z z + in\phi}, \quad (29)$$

где $J_n(k_\rho \rho)$ - функции Бесселя первого рода порядка n , а $k_\rho^2 + k_z^2 = k^2$. Далее определим три векторные функции следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_n(\mathbf{k}, \mathbf{r}) &= \nabla \times [\psi_n(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \mathbf{e}_z], \\ \mathbf{N}_n(\mathbf{k}, \mathbf{r}) &= \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}_n(\mathbf{k}, \mathbf{r}), \\ \mathbf{L}_n(\mathbf{k}, \mathbf{r}) &= \nabla \psi_n(\mathbf{k}, \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (30)$$

Может быть показано [32], [33], что такой набор является полным и ортогональным, а, значит, мы можем получить разложение искомой функции по векторным гармоникам, которое следует искать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dk_\rho k_\rho [\mathbf{M}_n(k_\rho, k_z, \mathbf{r}) \mathbf{C}\mathbf{M}_n(k_\rho, k_z) + \\ &+ \mathbf{N}_n(k_\rho, k_z, \mathbf{r}) \mathbf{C}\mathbf{N}_n(k_\rho, k_z) + \mathbf{L}_n(k_\rho, k_z, \mathbf{r}) \mathbf{C}\mathbf{L}_n(k_\rho, k_z)], \end{aligned} \quad (31)$$

здесь $\mathbf{C}\mathbf{M}_n(k_\rho, k_z)$, $\mathbf{C}\mathbf{N}_n(k_\rho, k_z)$, $\mathbf{C}\mathbf{L}_n(k_\rho, k_z)$ - векторные коэффициенты разложения, которые могут быть найдены путем подстановки (31) в уравнение (24), откуда с использованием соотношений ортогональности можно получить

$$\mathbf{G}_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dk_{\rho} k_{\rho} \left[\frac{\mathbf{M}_n(k_{\rho}, k_z, \mathbf{r}) \mathbf{M}_{-n}(-k_{\rho}, -k_z, \mathbf{r}')}{(k^2 - k_0^2) k_{\rho}^2} + \frac{\mathbf{N}_n(k_{\rho}, k_z, \mathbf{r}) \mathbf{N}_{-n}(-k_{\rho}, -k_z, \mathbf{r}')}{(k^2 - k_0^2) k_{\rho}^2} - \frac{\mathbf{L}_n(k_{\rho}, k_z, \mathbf{r}) \mathbf{L}_{-n}(-k_{\rho}, -k_z, \mathbf{r}')}{k_0^2 k^2} \right]. \quad (32)$$

Упрощенную форму этого выражения можно получить, если выполнить интегрирование по k_{ρ} [32], [33] и получить окончательно

$$\mathbf{G}_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = -\frac{\mathbf{e}_{\rho} \mathbf{e}_{\rho}}{k_0^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{i}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{k_0^2} \times \begin{cases} \mathbf{M}_n(k_{0\rho}, k_z, \mathbf{r}) \overline{\mathbf{M}}_n^{(1)}(k_{0\rho}, k_z, \mathbf{r}') + \mathbf{N}_n(k_{0\rho}, k_z, \mathbf{r}) \overline{\mathbf{N}}_n^{(1)}(k_{0\rho}, k_z, \mathbf{r}'), & \rho < \rho'; \\ \mathbf{M}_n^{(1)}(k_{0\rho}, k_z, \mathbf{r}) \overline{\mathbf{M}}_n(k_{0\rho}, k_z, \mathbf{r}') + \mathbf{N}_n^{(1)}(k_{0\rho}, k_z, \mathbf{r}) \overline{\mathbf{N}}_n(k_{0\rho}, k_z, \mathbf{r}'), & \rho > \rho', \end{cases} \quad (33)$$

где \mathbf{e}_{ρ} - единичный орт, $k_{0\rho} = \sqrt{k_0^2 - k_z^2}$, а верхний индекс (1) означает, что в соответствующей векторной функции необходимо заменить функцию Бесселя первого рода на функцию Ханкеля $H_n^{(1)}(k_{\rho}\rho)$. Далее мы не будем указывать явно зависимость от k_{ρ} для сокращения размера формул.

Перед тем как перейти к обсуждению получения явного вида рассеянной части функции Грина отметим, что при построении важным является то, в какой среде находится источник. Поскольку нас будет интересовать случай, когда и источник и приемник излучения находятся вне диэлектрического волокна, то мы ограничимся рассмотрением только этого случая. Тем не менее, далее нам необходимо будет сшивать решения на границе раздела двух сред и потому также мы рассмотрим случай, когда источник находится снаружи волокна, а приемник внутри. Теперь введем для функции Грина два дополнительных верхних индекса $\mathbf{G}_s^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$, где i, j будут нумеровать среды, в которых находятся источник и приемник, соответственно. В нашем случае, когда имеется всего одна граница раздела, примем,

что индекс 1 соответствует случаю, когда источник/приемник находится вне волокна, а 2 - когда внутри. Тогда функции Грина для интересующих нас случаев имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{G}^{11}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \mathbf{G}_h^{11}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) + \mathbf{G}_s^{11}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega), \\ \mathbf{G}^{21}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \mathbf{G}_s^{21}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega), \end{cases} \quad (34)$$

а, имея явный вид однородной части (33), мы можем записать рассеянные части в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_s^{11}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) &= \frac{i}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{k_{\rho 1}^2} \mathbf{F}_{\mathbf{M};n,1}^{11(1)}(k_z, \mathbf{r}) \overline{\mathbf{M}}_{n,1}^{(1)}(k_z, \mathbf{r}') \\ &\quad + \mathbf{F}_{\mathbf{N};n,1}^{11(1)}(k_z, \mathbf{r}) \overline{\mathbf{N}}_{n,1}^{(1)}(k_z, \mathbf{r}') \\ \mathbf{F}_{\mathbf{M};n,1}^{11(1)}(k_z, \mathbf{r}) &= R_{MM}^{11} \mathbf{M}_{n,1}^{(1)}(k_z, \mathbf{r}) + R_{NM}^{11} \mathbf{N}_{n,1}^{(1)}(k_z, \mathbf{r}), \\ \mathbf{F}_{\mathbf{N};n,1}^{11(1)}(k_z, \mathbf{r}) &= R_{MN}^{11} \mathbf{M}_{n,1}^{(1)}(k_z, \mathbf{r}) + R_{NN}^{11} \mathbf{N}_{n,1}^{(1)}(k_z, \mathbf{r}). \\ \mathbf{G}_s^{21}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) &= \frac{i}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{k_{\rho 1}^2} \mathbf{F}_{\mathbf{M};n,2}^{21}(k_z, \mathbf{r}) \overline{\mathbf{M}}_{n,1}^{(1)}(k_z, \mathbf{r}') \\ &\quad + \mathbf{F}_{\mathbf{N};n,1}^{21}(k_z, \mathbf{r}) \overline{\mathbf{N}}_{n,1}^{(1)}(k_z, \mathbf{r}') \\ \mathbf{F}_{\mathbf{M};n,2}^{21}(k_z, \mathbf{r}) &= R_{MM}^{21} \mathbf{M}_{n,2}(k_z, \mathbf{r}) + R_{NM}^{21} \mathbf{N}_{n,2}(k_z, \mathbf{r}), \\ \mathbf{F}_{\mathbf{N};n,2}^{21}(k_z, \mathbf{r}) &= R_{MN}^{21} \mathbf{M}_{n,2}(k_z, \mathbf{r}) + R_{NN}^{21} \mathbf{N}_{n,2}(k_z, \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (35)$$

где R_{LK}^{ij} - соответствующие коэффициенты Френеля, а дополнительные нижние индексы 1 и 2 у функций означают, что нужно заменить значение k_0 на значение для соответствующей среды. Из данного разложения хорошо видно, что в отличие от однородной части, для рассеянной функции Грина имеются слагаемые, отвечающие сочетанию TE и TM мод, что является следствием того, что в общем

случае моды такого волокна не являются TE или TM модами, а имеют гибридную природу.

Вид коэффициентов Френеля может быть найден путем сшивания функций на границе раздела

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\rho \times [\mathbf{G}^{11}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega) - \mathbf{G}^{21}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega)]|_{\rho_r=\rho_c}, \\ \mathbf{e}_\rho \times \nabla_{\mathbf{r}} \times [\mathbf{G}^{11}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega) - \mathbf{G}^{21}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega)]|_{\rho_r=\rho_c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_n \times R1_n = B1_n \\ A_n \times R2_n = B2_n \end{cases} \quad (36)$$

здесь в правой части записана эквивалентная система в виде матриц, явный вид которых

$$A_n = \begin{pmatrix} k_{\rho 1}^2 H_n(k_{\rho 1} \rho_c) & 0 & -k_{\rho 2}^2 J_n(k_{\rho 2} \rho_c) & 0 \\ 0 & \frac{k_{\rho 1}^2}{k_1} H_n(k_{\rho 1} \rho_c) & 0 & -\frac{k_{\rho 2}^2}{k_2} J_n(k_{\rho 2} \rho_c) \\ k_{\rho 1} (H_n(k_{\rho 1} \rho_c))' & \frac{nk_z}{\rho_c k_1} H_n(k_{\rho 1} \rho_c) & -k_{\rho 2} (J_n(k_{\rho 2} \rho_c))' & -\frac{nk_z}{\rho_c k_2} J_n(k_{\rho 2} \rho_c) \\ \frac{nk_z}{\rho_c} H_n(k_{\rho 1} \rho_c) & k_1 k_{\rho 1} (H_n(k_{\rho 1} \rho_c))' & -\frac{nk_z}{\rho_c} J_n(k_{\rho 2} \rho_c) & k_2 k_{\rho 2} (J_n(k_{\rho 2} \rho_c))' \end{pmatrix}$$

$$R1_n = \begin{pmatrix} R_{MM}^{11} \\ R_{NM}^{11} \\ R_{MM}^{21} \\ R_{NM}^{21} \end{pmatrix}, B1_n = \begin{pmatrix} -k_{\rho 1}^2 J_n(k_{\rho 1} \rho_c) \\ 0 \\ -k_{\rho 1} (J_n(k_{\rho 1} \rho_c))' \\ -\frac{nk_z}{\rho_c} J_n(k_{\rho 1} \rho_c) \end{pmatrix}$$

$$R2_n = \begin{pmatrix} R_{MN}^{11} \\ R_{NN}^{11} \\ R_{MN}^{21} \\ R_{NN}^{21} \end{pmatrix}, B2_n = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k_{\rho 1}^2}{k_1} J_n(k_{\rho 1} \rho_c) \\ -\frac{nk_z}{\rho_c k_1} J_n(k_{\rho 1} \rho_c) \\ -k_1 k_{\rho 1} (J_n(k_{\rho 1} \rho_c))' \end{pmatrix}, \quad (37)$$

где $k_{\rho i} = \sqrt{\epsilon_i k_0^2 - k_z^2}$, а штрих в выражениях типа $(J_n(k_{\rho 1} \rho_c))'$ означает производную по безразмерному аргументу.

Список литературы

- [1] Kimble, H. J., 2008, “The quantum internet,” *Nature (London)* 453, 1023.
- [2] Miller, R. et al. Trapped atoms in cavity QED: coupling quantized light and matter. *J. Phys. B.* 38, S551–S565 (2005).
- [3] Wrigge, G., Gerhardt, I., Hwang, J., Zumofen, G., Sandoghdar, V. Efficient coupling of photons to a single molecule and the observation of its resonance fluorescence. *Nature Phys.* 4, 60–66 (2008)
- [4] Tey, M. K., Z. Chen, S. A. Aljunid, B. Chng, F. Huber, G. Maslennikov, and C. Kurtsiefer, 2008, “Strong interaction between light and a single trapped atom without the need for a cavity,” *Nat. Phys.* 4, 2008
- [5] Akimov, A. V. et al. Generation of single optical plasmons in metallic nanowires coupled to quantum dots. *Nature* 450, 402–406 (2007).
- [6] Hammerer, K., A. S. Sørensen, and E. S. Polzik, 2010, “Quantum interface between light and atomic ensembles,” *Rev. Mod. Phys.* 82, 1041.
- [7] V. I. Balykin, K. Hakuta, Fam Le Kien, J. Q. Liang, and M. Morinaga, Atom trapping and guiding with a subwavelength-diameter optical fiber, *Phys. Rev. A* 70, 011401 (2004).
- [8] K. P. Nayak, P. N. Melentiev, M. Morinaga, Fam Le Kien, V. I. Balykin, and K. Hakuta, Optical nanofiber as an efficient tool for manipulating and probing atomic fluorescence, *Opt. Express* 15, 5431-5438 (2007).
- [9] E. Vetsch, D. Reitz, G. Sagué, R. Schmidt, S. T. Dawkins, and A. Rauschenbeutel, Optical Interface Created by Laser-Cooled Atoms Trapped in the Evanescent Field Surrounding an Optical Nanofiber, *Phys. Rev. Lett.* 104 203603 (2010)

- [10] L. Tong, R. R. Gattass, J. B. Ashcom, S. He, J. Lou, M. Shen, I. Maxwell, and E. Mazur, Subwavelength-diameter silica wires for low-loss optical wave guiding, *Nature*, London 426, 816 (2003)
- [11] Ovchinnikov Y. B., Shul'ga S. V., Balykin V. I., An atomic trap based on evanescent light waves, *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* 24 3173 (1991)
- [12] Kien F. L., Balykin V. I., Hakuta K., Atom trap and waveguide using a two-color evanescent light field around a subwavelength-diameter optical fiber, *Phys. Rev. A* 70 063403 (2004)
- [13] E.G. Lima, M.Chevrollier, O.Di Lorenzo, P.C. Segundo, and M. Oria, Long-range atom-surface bound states, *Phys. Rev. A*, 62:013410, 2000
- [14] Afanasiev A. E., Melentiev P. N., Balykin V. I., Laser-induced quantum adsorption of atoms on a surface, *JETP Lett.* 86 172 (2007)
- [15] Vetsch, E., D. Reitz, G. Sague, R. Schmidt, S. T. Dawkins, and A. Rauschenbeutel, Optical interface created by laser-cooled atoms trapped in the evanescent field surrounding an optical nanofiber, 2010, *Phys. Rev. Lett.* 104, 203603
- [16] B. Gouraud, D. Maxein, A. Nicolas, O. Morin, and J. Laurat, Demonstration of a memory for tightly guided light in an optical nanofiber, *Phys. Rev. Lett.* 114, 180503 (2015)
- [17] C. Sayrin, C. Clausen, B. Albrecht, P. Schneeweiss, and A. Rauschenbeutel, Storage of fiber-guided light in a nanofiber-trapped ensemble of cold atoms, *Optica* 2, 353 (2015).
- [18] N.V. Corzo, B. Gouraud, A. Chandra, A. Goban, A.S. Sheremet, D.V. Kupriyanov, J. Laurat, Large Bragg Reflection from One-Dimensional Chains of Trapped Atoms Near a Nanoscale Waveguide, <https://arxiv.org/abs/1604.03129>

- [19] H. L. Sørensen, J.-B. Beguin, K. W. Kluge, I. Iakoupov, A. S. Sørensen, J. H. Muller, E. S. Polzik, and J. Appel, Coherent backscattering of light off one-dimensional atomic strings, <http://arxiv.org/pdf/1601.04869>
- [20] I.H. Deutsch, R.J.C. Spreeuw, S.L. Rolston, and W.D. Phillips, Photonic band gaps in optical lattices, *Phys. Rev. A* **52**, 1394 (1995)
- [21] Fam Le Kien and A. Rauschenbeutel, Propagation of nanofiber-guided light through an array of atoms, *Phys. Rev. A* **90**, 063816 (2014)
- [22] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications* (Wiley, New York, 1992).
- [23] A.S. Sheremet, A.D. Manukhova, N.V. Larionov, D.V. Kupriyanov, Cooperative light scattering on an atomic system with degenerate structure of the ground state, *Phys. Rev. A* **86**, 043414 (2012)
- [24] V.M. Ezhova, L.V. Gerasimov, D.V. Kupriyanov, (arXiv:1602.07562v1 [quant-ph]), On a theory of light scattering from a Bose-Einstein condensate. (2016)
- [25] Minogin, V. G. and Nic Chormaic, Síle (2010) 'Manifestation of the van der Waals Surface Interaction in the Spontaneous Emission of Atoms into an Optical Nanofiber'. *LASER PHYSICS*, **20** (1):32-37.
- [26] F. L. Kien, J. Q. Liang, K. Hakuta, and J. I. Balykin, "Field intensity distributions and polarization orientations in a vacuum-clad subwavelength-diameter optical fiber," *Opt. Commun.* **242**, 445–455 (2004).
- [27] L. Knoll, S. Scheel, and D.-G. Welsch, QED in Dispersing and Absorbing Media, in *Coherence and Statistics of Photons and Atoms*, edited by J. Perina (Wiley, New York, 2001).

- [28] T. Gruner and D.-G. Welsch, Green-function approach to the radiation-field quantization for homogeneous and inhomogeneous Kramers-Kronig dielectrics, *Phys. Rev. A* 53, 1818 (1996).
- [29] H. T. Dung, L. Knöll, and D.-G. Welsch, Intermolecular energy transfer in the presence of dispersing and absorbing media, *Phys. Rev. A* 65, 043813 (2002).
- [30] W. H. Weber, G. W. Ford, Propagation of optical excitations by dipolar interactions in metal nanoparticle chains, *Phys. Rev. B: Condens. Matter Mater. Phys.* 2004, 70, 125 429.
- [31] R. H. Dicke, Coherence in spontaneous radiation processes, *Phys. Rev.* 93, 99 (1954)
- [32] W. C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media* IEEE Press, 1994.
- [33] C.-T. Tai, *Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory* IEEE, Piscataway, NJ, 1993, 2nd ed.