

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА/GRADUATION THESIS

**Влияние симметричных свойств диэлектрических частиц на их бианизотропный
оптический отклик**

Автор/ Author

Полева Мария Андреевна

Направленность (профиль) образовательной программы/Major

Нанопотоника и квантовая оптика 2017

Квалификация/ Degree level

Бакалавр

Руководитель ВКР/ Thesis supervisor

Барышникова Ксения Владимировна, кандидат физико-математических наук, Университет ИТМО, физический факультет, старший научный сотрудник

Группа/Group

Z3443

Факультет/институт/кластер/ Faculty/Institute/Cluster

физический факультет

Направление подготовки/ Subject area

16.03.01 Техническая физика

Обучающийся/Student

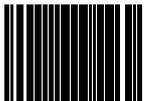
Документ подписан	
Полева Мария Андреевна	
04.06.2021	

(эл. подпись/ signature)

Полева Мария
Андреевна

(Фамилия И.О./ name
and surname)

Руководитель ВКР/
Thesis supervisor

Документ подписан	
Барышникова Ксения Владимировна	
04.06.2021	

(эл. подпись/ signature)

Барышникова
Ксения
Владимировна

(Фамилия И.О./ name
and surname)

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University**

**ЗАДАНИЕ НА ВЫПУСКНУЮ КВАЛИФИКАЦИОННУЮ РАБОТУ /
OBJECTIVES FOR A GRADUATION THESIS**

Обучающийся / Student Полева Мария Андреевна

Группа/Group Z3443

Факультет/институт/кластер/ Faculty/Institute/Cluster физический факультет

Квалификация/ Degree level Бакалавр

Направление подготовки/ Subject area 16.03.01 Техническая физика

Направленность (профиль) образовательной программы/Major Нанопотоника и квантовая оптика 2017

Специализация/ Specialization

Тема ВКР/ Thesis topic Влияние симметричных свойств диэлектрических частиц на их бианизотропный оптический отклик

Руководитель ВКР/ Thesis supervisor Барышникова Ксения Владимировна, кандидат физико-математических наук, Университет ИТМО, физический факультет, старший научный сотрудник

Срок сдачи студентом законченной работы до / Deadline for submission of complete thesis 31.05.2021

Техническое задание и исходные данные к работе/ Requirements and premise for the thesis

1. Научиться делать мультипольное разложение в программном обеспечении COMSOL Multiphysics. 2. Изучить электромагнитный отклик диэлектрических наночастиц в форме призмы с равнобедренным и равносторонним треугольниками в основании на падающую плоские волны различных конфигураций. Проанализировать разницу в откликах призм с равнобедренным и равносторонним треугольниками в основании. 3. Объяснить разницу между откликами двух призм с помощью теории групп и мультипольного анализа собственных мод. Проверить результаты с помощью облучения частиц одиночными мультиполями. 4. Переосмыслить термин бианизотропия и его применимость к электромагнитному отклику рассмотренных призм.

Содержание выпускной квалификационной работы (перечень подлежащих разработке вопросов)/ Content of the thesis (list of key issues)

1. Литературный обзор работ, содержащих такие темы, как мультипольное разложение, бианизотропия, электромагнитный отклик диэлектрических частиц, применение теории групп для мультипольного анализа собственных мод.
2. Рассеяние плоской волны на наночастицах в форме призмы.
3. Мультипольный анализ оптического отклика нанопризмы.
4. Групповой анализ собственных мод призм с равносторонним и равнобедренным треугольниками в основании.

5. Эффекты бианизотропии и нелокальности в нанопризмах.
6. Облучение призм одиночными мультиполями.
7. Обсуждение области применения рассмотренных эффектов.

Перечень графического материала (с указанием обязательного материала) / List of graphic materials (with a list of required material)

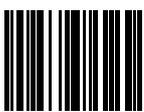
Исходные материалы и пособия / Source materials and publications

1. Asadchy V. S., Diaz-Rubio A., Tretyakov S. A. Bianisotropic metasurfaces: physics and applications //Nanophotonics. – 2018. – Т. 7. – №. 6. – С. 1069-1094.
2. Evlyukhin A. B. et al. Bianisotropy for light trapping in all-dielectric metasurfaces //Physical Review B. – 2020. – Т. 101. – №. 20. – С. 205415.
3. Gladyshev S., Frizyuk K., Bogdanov A. Symmetry analysis and multipole classification of eigenmodes in electromagnetic resonators for engineering their optical properties //Physical Review B. – 2020. – Т. 102. – №. 7. – С. 075103.
4. Alae R., Rockstuhl C., Fernandez-Corbaton I. An electromagnetic multipole expansion beyond the long-wavelength approximation //Optics Communications. – 2018. – Т. 407. – С. 17-21.
5. Bobylev D. A., Smirnova D. A., Gorkach M. A. Nonlocal response of Mie-resonant dielectric particles //Physical Review B. – 2020. – Т. 102. – №. 11. – С. 115110.
6. Achouri K., Martin O. J. F. Extension of Lorentz Reciprocity and Poynting Theorems for Spatially Dispersive Media with Quadrupolar Responses //arXiv preprint arXiv:2102.08197. – 2021.
7. Sersic I. et al. Magnetolectric point scattering theory for metamaterial scatterers //Physical Review B. – 2011. – Т. 83. – №. 24. – С. 245102.
8. Xiong Z. et al. On the constraints of electromagnetic multipoles for symmetric scatterers: eigenmode analysis //Optics express. – 2020. – Т. 28. – №. 3. – С. 3073-3085.

Дата выдачи задания/ Objectives issued on 10.05.2021

СОГЛАСОВАНО / AGREED:

Руководитель ВКР/
Thesis supervisor

Документ подписан	
Барышникова Ксения Владимировна	
10.05.2021	

Барышникова
Ксения
Владимировна

(эл. подпись)

Задание принял к
исполнению/ Objectives
assumed by

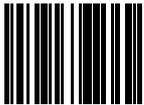
Документ подписан	
Полева Мария Андреевна	
10.05.2021	

Полева Мария
Андреевна

(эл. подпись)

Руководитель ОП/ Head
of educational program

Документ подписан	
----------------------	--

	
Белов Павел Александрович	
21.05.2021	

Белов Павел
Александрович

(эл. подпись)

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University**

**АННОТАЦИЯ
ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ /
SUMMARY OF A GRADUATION THESIS**

Обучающийся/ Student

Полева Мария Андреевна

Наименование темы ВКР / Title of the thesis

Влияние симметричных свойств диэлектрических частиц на их бианизотропный оптический отклик

Наименование организации, где выполнена ВКР/ Name of organization

Университет ИТМО

**ХАРАКТЕРИСТИКА ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ/
DESCRIPTION OF THE GRADUATION THESIS**

1. Цель исследования / Research objective

Исследование рассеяния света на диэлектрических частицах в форме треугольных призм с равнобедренным и равносторонним треугольниками в основании, анализ бианизотропного отклика данных частиц с помощью теории групп.

2. Задачи, решаемые в ВКР / Research tasks

Моделирование и мультипольное разложение в программном обеспечении COMSOL Multiphysics. Мультипольный анализ собственных мод частиц в форме треугольных призм с равносторонним и равнобедренным треугольниками в основании, анализ электромагнитного отклика данных частиц и объяснение их бианизотропных свойств с помощью модового анализа. Разложение плоских волн всех конфигураций по мультиполям до квадрупольей.

3. Краткая характеристика полученных результатов / Short summary of results/conclusions

Проведено моделирование и мультипольное разложение электромагнитного отклика диэлектрических частиц в форме треугольных призм с равнобедренным и равносторонним треугольниками в основании. Предложен метод определения мультипольного состава собственных мод любых частиц и с помощью этого метода получен мультипольный состав собственных мод рассматриваемых в данной работе частиц. Определен мультипольный состав плоских волн всех конфигураций до квадрупольей. С помощью модового анализ объяснено появление бианизотропного отклика на плоские волны у обеих призм.

4. Наличие публикаций по теме выпускной работы/ Have you produced any publications on the topic of the thesis

5. Наличие выступлений на конференциях по теме выпускной работы/ Have you produced any conference reports on the topic of the thesis

- 1 КМУ 2021, 14.04.2021 - 17.04.2021 (Конференция, статус - всероссийский)
- 2 XVII Всероссийская школа-семинар «Волновые явления в неоднородных средах» имени А.П. Сухорукова («Волны-2020»), 23.08.2020 - 28.08.2020 (Конференция, статус - всероссийский)

6. Полученные гранты, при выполнении работы/ Grants received while working on the thesis

7. Дополнительные сведения/ Additional information

Обучающийся/Student

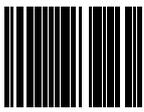
Документ подписан	
Полева Мария Андреевна	
04.06.2021	

(эл. подпись/ signature)

Полева Мария
Андреевна

(Фамилия И.О./ name
and surname)

Руководитель ВКР/
Thesis supervisor

Документ подписан	
Барышникова Ксения Владимировна	
04.06.2021	

(эл. подпись/ signature)

Барышникова
Ксения
Владимировна

(Фамилия И.О./ name
and surname)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	8
1 Электромагнитный отклик частицы	16
1.1 Общая теория	16
1.2 Связь коэффициентов поляризуемостей	17
2 Моделирование и мультипольное разложение	21
2.1 Равносторонняя треугольная призма	21
2.2 Равнобедренная треугольная призма	26
3 Теоретический анализ	30
3.1 Мультипольный анализ собственный мод	30
3.2 Разложение плоских волн по векторным сферическим гармоникам	32
3.3 Симметричный анализ равносторонних призм	34
3.4 Симметричный анализ равнобедренных призм	38
3.5 Облучение одиночными мультиполями	40
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	44
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	46

ВВЕДЕНИЕ

В наши дни одной из ключевых задач исследований в области современных технологий является увеличение скорости передачи и обработки информации, а также вычислительной мощности. Необходимость поиска концептуально новых методов в данной области связано с уменьшением размера транзисторов, и, следовательно, перегревом. Возможным решением данной проблемы является использование фотонов вместо электронов в качестве основных носителей информации. Помимо нулевой массы и заряда у фотонов есть еще одно преимущество в сравнении с электронами - возможность работы на частотах в районе 500 ТГц. При этом частота работы самых быстрых электронных компонент не превышает 1 ТГц. Однако фотоны плохо взаимодействуют с нанометровыми объектами из-за относительно большой длины волны. Эта проблема побудила разработчиков создать новые инструменты взаимодействия со светом, и таким образом появилась наука плазмоника. Данный раздел оптики основывается на свойствах благородных металлов, и открывает путь к управлению преимущественно электрической компонентой света [1].

Эффективное управление светом заключается в возможности контроля над его электрической и магнитной компонентами одновременно. Достижение этого открыло бы путь к созданию материалов со свойствами, не встречающимися в природе, например, с отрицательным показателем преломления [2]. При этом магнитный отклик природных материалов мал, что дало толчок к исследованию структур, обладающих искусственным магнитным откликом. Одним из наиболее известных примеров таких структур является металлический резонатор в виде разомкнутого кольца на рисунке 1 (а). Но диссипативные потери в металлах накладывают фундаментальные ограничения на работу металлических устройств в оптическом диапазоне. Преодолеть данную проблему можно с помощью замены металлических частиц на частицы из диэлектриков с высоким показателем преломления. Было показано, что они обладают наведенным магнитным моментом и при этом значительно более низкими потерями [3], что особенно важно, когда их уровень играет ключевую роль в каче-

стве работы устройства. Помимо этого, резонансы диэлектрических частиц зависят от их формы, размера, а также от внешнего окружения, то есть спектральное положение резонансов можно регулировать, изменяя параметры системы [4, 5, 6]. На рисунке 1 (б) проиллюстрировано распределение полей в диэлектрической частице сферической формы, размеры которой подобраны таким образом, чтобы отклик системы наблюдался на частоте магнитного резонанса. Таким образом, на сегодняшний день **диэлектрическая нанофотоника**, наука, изучающая взаимодействие света с наноструктурами, состоящими из диэлектрических наночастиц с высоким значением показателя преломления, является одной из наиболее многообещающих отраслей оптики.

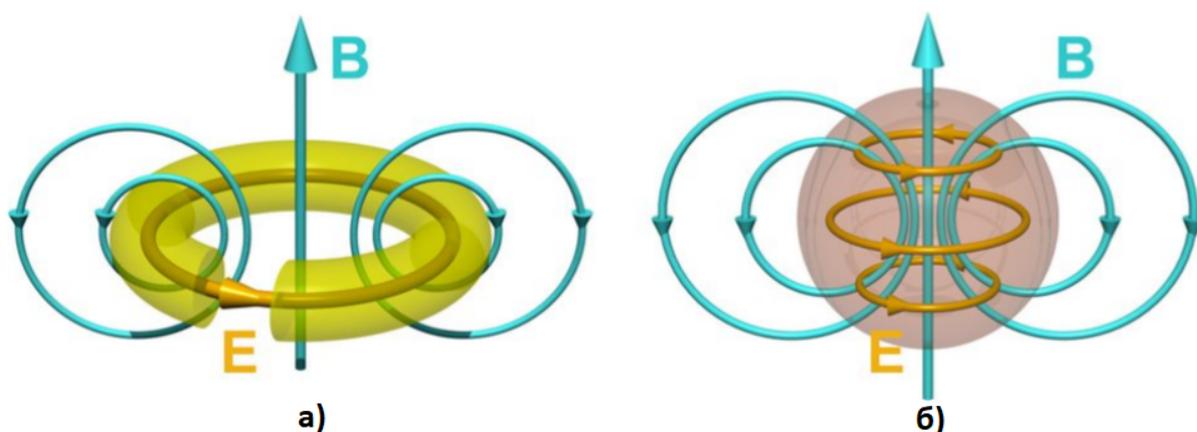


Рисунок 1 — Распределение электрических и магнитных полей на частоте магнитного резонанса у (а) металлической частицы, (б) диэлектрической частицы с высоким показателем преломления [1]

Большую роль в нанофотонике играют наноструктуры. Обычно наноструктуры основаны на большом числе так называемых мета-атомов - определенным образом упакованных элементов, из которых построена вся структура. При этом размеры мета-атомов достаточно большие, чтобы быть несложными в изготовлении, но при этом достаточно маленькие в сравнении с длиной волны падающего излучения. Как уже было показано выше, особое место среди мета-атомов занимают частицы из диэлектриков с высоким показателем преломления. Свойства наноструктуры зависят как от свойств каждого мета-атома, так и от их относительного положения. Если в структуре не возбуждаются кумулятивные эффекты, свойства каждого мета-атома (размер, форма и материал) играют

важную роль. Вот почему исследование индивидуальных наночастиц и их кластеров представляет такой интерес для сообщества нанофотоники [7].

Для объяснения, управления и прогнозирования оптических свойств наночастиц было предложено несколько методов, в том числе приближение дискретных диполей [4, 8], в котором частицы рассматриваются как магнитные или электрические диполи, помещенные в их центр, при этом вся информация о свойствах частицы содержится в тензоре электрической или магнитной поляризуемости. Однако последние исследования показывают, что некоторые эффекты рассеяния не могут быть объяснены с помощью данного приближения, и необходимо учитывать мультиполи высокого порядка [9] или нелокальный отклик. Мета-атомы могут обладать относительно большими размерами, зачастую сравнимыми с длиной волны, и, следовательно, в некоторых случаях для них нужно учитывать эффекты пространственной дисперсии. Иными словами, электромагнитный отклик таких частиц будет зависеть не только от локальных полей в точке, но также и от их производных [10, 11].

Одним из проявлений пространственной дисперсии является свойство частиц, систем частиц и сред, называемое **бианизотропией** [10]. Данное явление, в классическом понимании, представляется в зависимости электрического и магнитного диполей для частиц и электрической индукции и магнитного поля для сред не только от падающих точечных полей той же природы, но также и от полей другой природы. При этом стоит отметить, что речь идет о линейной зависимости. Иными словами, электрический диполь для частиц, обладающих бианизотропией, зависит от электрического и магнитного поля одновременно, и наоборот. На рисунке 2 изображен классический пример резонатора в форме разомкнутого кольца и возбуждающиеся в нем электрический и магнитный диполь под действием внешнего электрического поля. Более того, было продемонстрировано, что для определенной формы, размера и материала частиц дипольный бианизотропный отклик, то есть отклик на поле другой природы, может превышать отклик на поле природы диполя [12]. Стоит отметить, что общие свойства бианизотропных сред были впервые

выведены лишь в 1970 году, а распространение волн в таких средах было изучено в 1990-х годах [10].

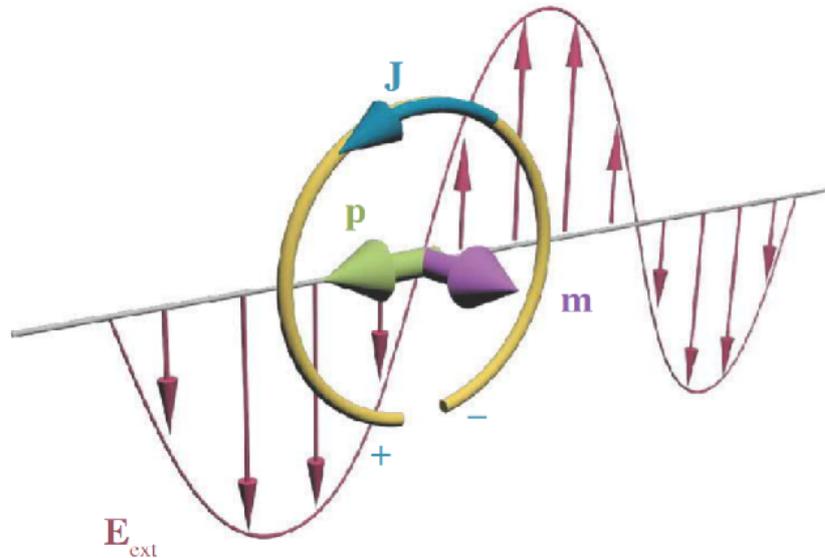


Рисунок 2 — Металлический резонатор в форме разомкнутого кольца, возбуждающиеся в нем магнитный и электрический диполи, а также ток поляризации под действием внешнего поля [10]

Последнее время бианизотропные метаповерхности и метаматериалы привлекают к себе все больше и больше внимания из-за их широкого спектра применений. С помощью таких поверхностей, составленных из дисков с отверстием, смещенным от центра, удалось возбудить запертую моду или связанное состояние в континууме (далее СКК), превратив ее в квази-запертую. Возбуждение квази-запертых мод приводит к появлению резонансов высокой добротности и усилению ближнего поля в десятки раз [13]. На картинке 3 (а) продемонстрирован эффект усиления ближних магнитных полей в метаповерхности на резонансной частоте возбуждения магнитной запертой моды. При этом, как видно из рисунка 3 (б), на нерезонансной частоте ближние магнитные поля значительно меньше. СКК также возбуждались с помощью нарушения поворотной симметрии, и появляющейся вследствие этого бианизотропии, в работе [14].

Помимо возбуждения запертых мод, бианизотропные поверхности также могут служить фильтром циркулярной поляризации [10]. Чтобы продемонстрировать данный эффект, рассмотрим метаповерхность, состоящую из бианизотропных спиралей, ориентированных в одном на-

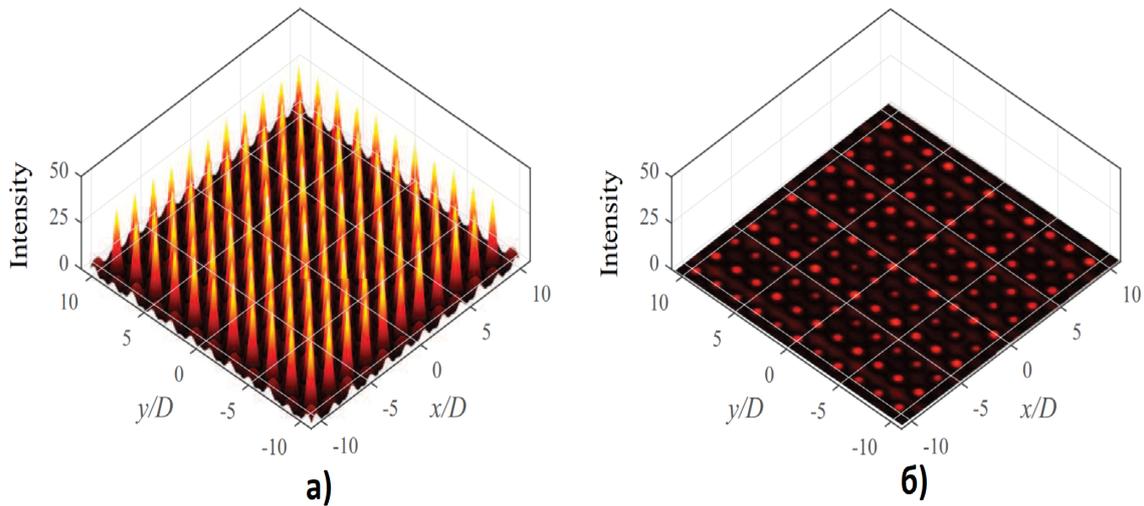


Рисунок 3 — Интенсивность z-компоненты магнитного поля метаповерхности, составленной из дисков с отверстием, смещенным от центра, лежащей в плоскости (x,y) на (а) резонансной частоте возбуждения квази-запертой моды, (б) на частоте, далекой от резонанса [13]

правлении, как показано на рисунке 4. Электрическое поле из падающей линейно поляризованной волны возбуждает в спиральях электрический и магнитный диполи, что является проявлением бианизотропии. При этом магнитное поле не возбуждает рассматриваемые частицы. Параметры частиц подобраны таким образом, что магнитный и электрический диполь в отклике имели противоположные фазы. Так как параллельные магнитный и электрический диполи излучают плоские волны перпендикулярных поляризаций, то с учетом противоположности фаз в отраженной волне мы получим правую циркулярную поляризацию (на самом деле мы получаем правую или левую в зависимости от направления раскручивания спирали), как это продемонстрировано на рисунке 4. При этом проходящая волна будет иметь левую циркулярную поляризацию. Следовательно, такая поверхность полностью пропускает одну циркулярную поляризацию, и полностью отражает вторую.

Как было показано в [15], при облучении частицы с отверстием на половину высоты в направлениях $+z$ и $-z$ из-за наличия бианизотропии диполи одинаковой природы в отклике не совпадают по модулю. Кроме того, для этих двух направлений также не совпадают эффективные

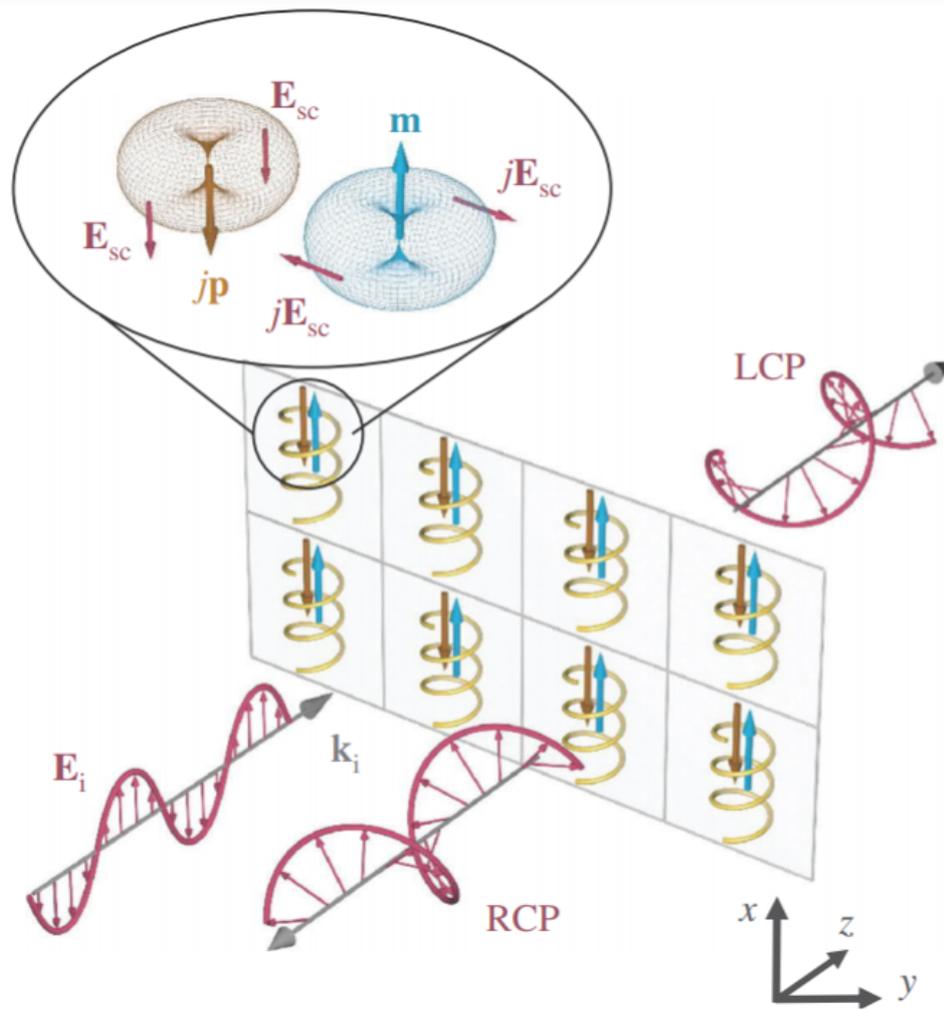


Рисунок 4 — Отклик бианизотропной метаповерхности, составленной из спиралей, на падающую плоскую волну. Спирали раскручиваются вправо, отраженная волна имеет правую циркулярную поляризацию, прошедшая левую [10]

площади рассеяния. Такая частица схематично изображена на рисунке 5 (а). На рисунке 5 (б) показана метаповерхность, составленная из таких частиц. Благодаря бианизотропным свойствам отдельных частиц и вытекающей из них несимметрии величин в отклике, в такой метаповерхности можно получать неодинаковое отражение при облучении структуры сверху и снизу.

Помимо приведенных выше свойств бианизотропные поверхности могут также работать как устройства для поворота поляризации, проявлять аномальное отражение и пропускание [10], а также иметь нулевое отражение [16]. Более того, было продемонстрировано магнито-электрическое бианизотропное взаимодействие для сферы на подложке [17].

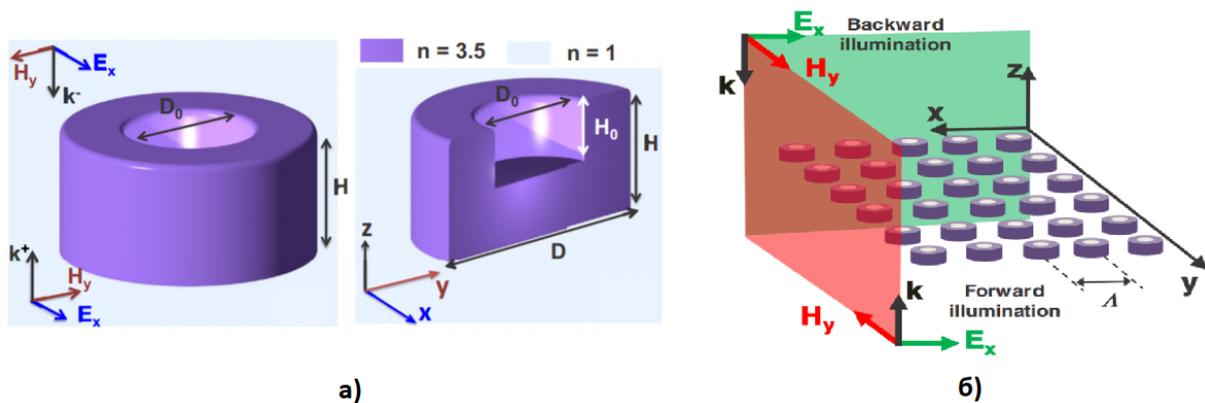


Рисунок 5 — (а) Схематическое изображение диэлектрической частицы с отверстием на половину высоты; (б) Метаповерхность из таких частиц [15]

В акустике бианизотропия также имеет большое количество применений и определяется через каплинг Уиллиса [18]. Например, в работе [19] продемонстрировано, как с помощью тонких метаповерхностей, составленных из мета-атомов определенного дизайна, можно контролировать поток энергии акустических волн практически без потерь. Помимо этого были изучены поверхности с аномальным отражением и пропусканием [20]. Также с помощью бианизотропных метаповерхностей предлагается конструировать звуковые барьеры для шумов в широком диапазоне частот [21].

Мы убедились, что бианизотропные поверхности обладают большим количеством применений, но при этом все их свойства напрямую зависят от свойств отдельных составляющих. Поэтому, как уже упоминалось, очень важно изучать свойства отдельных мета-атомов. **В данной работе будет рассмотрено рассеяние двух видов частиц - треугольных призм с равнобедренным и равносторонним треугольниками в основаниях.** Выбор частиц данной формы неслучаен, так как, во-первых, частицы данной формы еще не были изучены с точки зрения бианизотропного отклика, а с другой стороны, частицы в форме треугольных призм имеют широкое применение в других областях нанофотоники, например, в нелинейной оптике [22, 23]. Помимо этого частица в форме треугольной призмы не имеет центра инверсии, а для многих частиц без центра инверсии, таких как дисков с отверстием, смещенным

от центра, спиралей, омега-частиц, бианизотропный отклик наблюдался [13, 10]. Несложно также показать, что у конфигураций с центром инверсии бианизотропия невозможна [11].

В данной работе мы приведем сравнение электромагнитных откликов призм с равнобедренным и равносторонним треугольниками в основании на плоские волны разных конфигураций, и проанализируем их с точки зрения теории симметрии [24]. Мы покажем, что во многих случаях классическое определение бианизотропии, которое обсуждалось выше, неприменимо для описания рассеяния частицы, несмотря на то, что численно электромагнитный отклик будет похож на проявление бианизотропии. Кроме того, будет показано, что иногда дипольная локальная модель не работает для описания отклика частиц, и для правильного анализа надо рассматривать старшие мультипольные вклады в плоскую волну, или нелокальность.

1 Электромагнитный отклик частицы

1.1 Общая теория

Классическое определение бианизотропии для одиночного метатомата в локальном дипольном приближении выражается в следующих соотношениях [10, 13]

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \boldsymbol{\alpha}^{EE} \mathbf{D}_{in} + c_d^{-1} \boldsymbol{\alpha}^{EH} \mathbf{H}_{in} \\ \mathbf{m} &= \boldsymbol{\alpha}^{HH} \mathbf{H}_{in} + c_d \boldsymbol{\alpha}^{HE} \mathbf{D}_{in},\end{aligned}\tag{1.1}$$

где $c_d = (\mu_0 \varepsilon_0 \mu_d \varepsilon_d)^{-1/2} = c / (\mu_d \varepsilon_d)^{1/2}$ - скорость света в однородном окружающем пространстве с относительной диэлектрической проницаемостью ε_d и магнитной восприимчивостью μ_d (которую здесь и далее мы будем считать равной 1), $\mathbf{D}_{in} = \varepsilon_0 \varepsilon_d \mathbf{E}_{in}$, ε_0 и μ_0 - электрическая и магнитная постоянные соответственно. Матрица $\boldsymbol{\alpha}$ - тензор поляризуемости 6×6 , который состоит из четырех блоков 3×3 $\boldsymbol{\alpha}^{EE}$, $\boldsymbol{\alpha}^{EH}$, $\boldsymbol{\alpha}^{HE}$, $\boldsymbol{\alpha}^{HH}$. Каждый из этих блоков отвечает за электрический или магнитный дипольный отклик на магнитное \mathbf{H}_{in} или электрическое \mathbf{E}_{in} падающие поля. Соотношение 1.1 обычно используется для описания электромагнитного отклика би-анизотропных (-изотропных) рассеивателей (т.е. хотя бы с одной не пренебрежимо малой компонентной тензоров $\boldsymbol{\alpha}^{EH}$, $\boldsymbol{\alpha}^{HE}$) [10, 13, 25]. Важно отметить, что данные уравнения написаны для случая, когда дипольные моменты определены только точечными падающими полями (локальная дипольная модель). Для частицы, обладающей взаимностью (то есть без нарушения симметрии относительно обращения времени), компоненты тензора поляризуемости подчиняются соотношениями симметрии Онзагера-Казимира [10, 26, 27]

$$\boldsymbol{\alpha}^{EE} = (\boldsymbol{\alpha}^{EE})^T, \quad \boldsymbol{\alpha}^{HH} = (\boldsymbol{\alpha}^{HH})^T, \quad \boldsymbol{\alpha}^{EH} = -(\boldsymbol{\alpha}^{HE})^T,\tag{1.2}$$

где T обозначает операцию транспонирования. Данные соотношения вытекают из симметрии уравнения Максвелла по отношению к обращению времени, а также линейности отклика. Вывод данных соотношений приведен в [27]. Более того, компоненты тензора поляризуемости связаны

между собой законом сохранения энергии и оптической теоремой [25].
Данные соотношения выведены в подразделе 1.2.

1.2 Связь коэффициентов поляризуемостей

Перепишем соотношения (1.1) в другом виде, введя тензор $\boldsymbol{\alpha}_{DH}$

$$\boldsymbol{\alpha}_{DH} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \varepsilon_d \boldsymbol{\alpha}_{EE} & c_d^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{EH} \\ \varepsilon_0 \varepsilon_d c_d \boldsymbol{\alpha}_{HE} & \boldsymbol{\alpha}_{HH} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}_{DH} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\text{in}} \\ \mathbf{H}_{\text{in}} \end{pmatrix},$$

где k_d и k_0 - волновые вектора среды и свободного пространства соответственно. Воспользуемся выражениями для мощности экстинкции через оптическую теорему и рассеянной мощности [28]

$$P_{\text{ext}} \simeq \frac{\omega}{2} \text{Im} \{ \mathbf{E}_{\text{in}}^* \cdot \mathbf{p} + \mu_0 \mathbf{H}_{\text{in}}^* \cdot \mathbf{m} \}$$

$$P_{\text{sca}} \simeq \frac{k_0^4}{12\pi \varepsilon_0^2 c_d \mu_0} |\mathbf{p}|^2 + \frac{k_0^4 \varepsilon_d}{12\pi \varepsilon_0 c_d} |\mathbf{m}|^2 = \frac{k_0^4}{12\pi \varepsilon_0^2 c_d \mu_0} (|\mathbf{p}|^2 + c_d^{-2} |\mathbf{m}|^2).$$

В отсутствие поглощения приравняем данные выражения

$$\frac{\omega}{2} \text{Im} \{ \mathbf{E}_{\text{in}}^* \cdot \mathbf{p} + \mu_0 \mathbf{H}_{\text{in}}^* \cdot \mathbf{m} \} = \frac{k_0^4}{12\pi \varepsilon_0^2 c_d \mu_0} (|\mathbf{p}|^2 + c_d^{-2} |\mathbf{m}|^2)$$

$$\frac{\omega}{2} \text{Im} \{ \mathbf{E}_{\text{in}}^* \cdot \mathbf{p} + \mu_0 \mathbf{H}_{\text{in}}^* \cdot \mathbf{m} \} = \frac{k_0^4}{12\pi \varepsilon_0^2 \mu_0 c_d} \left[(\mathbf{p} \ c_d^{-1} \mathbf{m})^* \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ c_d^{-1} \mathbf{m} \end{pmatrix} \right].$$

Введем матрицы α_i такими образом, чтобы данное равенство можно было свести к матричному уравнению

$$\frac{\omega}{2} \text{Im} \left[(\mathbf{E}_{\text{in}} \ \mathbf{H}_{\text{in}})^* \boldsymbol{\alpha}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\text{in}} \\ \mathbf{H}_{\text{in}} \end{pmatrix} \right] = \frac{k_0^4}{12\pi \varepsilon_0^2 \mu_0 c_d} \left[(\mathbf{E}_{\text{in}} \ \mathbf{H}_{\text{in}})^* \boldsymbol{\alpha}_2^{*T} \boldsymbol{\alpha}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\text{in}} \\ \mathbf{H}_{\text{in}} \end{pmatrix} \right],$$

где

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \varepsilon_d \boldsymbol{\alpha}_{EE} & c_d^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{EH} \\ c_d^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{HE} & \mu_0 \boldsymbol{\alpha}_{HH} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \varepsilon_d \boldsymbol{\alpha}_{EE} & c_d^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{EH} \\ \varepsilon_0 \varepsilon_d \boldsymbol{\alpha}_{HE} & c_d^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{HH} \end{pmatrix}.$$

Далее, учитывая дисперсию $\omega = c_d k_d = c k_0$, получаем следующее соотношение

$$\frac{1}{2i} [\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1^{*T}] = \frac{k_d^3}{6\pi \varepsilon_0 \varepsilon_d} \boldsymbol{\alpha}_2^{*T} \boldsymbol{\alpha}_2. \quad (1.3)$$

Используя равенства (1.2), запишем тензоры $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\alpha}^{*T}$ в общем виде

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx}^e & \alpha_{xy}^e & \alpha_{xz}^e & \alpha_{xx}^{em} & \alpha_{xy}^{em} & \alpha_{xz}^{em} \\ \alpha_{xy}^e & \alpha_{yy}^e & \alpha_{yz}^e & \alpha_{yx}^{em} & \alpha_{yy}^{em} & \alpha_{yz}^{em} \\ \alpha_{xz}^e & \alpha_{yz}^e & \alpha_{zz}^e & \alpha_{zx}^{em} & \alpha_{zy}^{em} & \alpha_{zz}^{em} \\ -\alpha_{xx}^{em} & -\alpha_{yx}^{em} & -\alpha_{zx}^{em} & \alpha_{xx}^m & \alpha_{xy}^m & \alpha_{xz}^m \\ -\alpha_{xy}^{em} & -\alpha_{yy}^{em} & -\alpha_{zy}^{em} & \alpha_{xy}^m & \alpha_{yy}^m & \alpha_{yz}^m \\ -\alpha_{xz}^{em} & -\alpha_{yz}^{em} & -\alpha_{zz}^{em} & \alpha_{xz}^m & \alpha_{yz}^m & \alpha_{zz}^m \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{*T} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx}^{e*} & \alpha_{xy}^{e*} & \alpha_{xz}^{e*} & -\alpha_{xx}^{em*} & -\alpha_{xy}^{em*} & -\alpha_{xz}^{em*} \\ \alpha_{xy}^{e*} & \alpha_{yy}^{e*} & \alpha_{yz}^{e*} & -\alpha_{yx}^{em*} & -\alpha_{yy}^{em*} & -\alpha_{yz}^{em*} \\ \alpha_{xz}^{e*} & \alpha_{yz}^{e*} & \alpha_{zz}^{e*} & -\alpha_{zx}^{em*} & -\alpha_{zy}^{em*} & -\alpha_{zz}^{em*} \\ \alpha_{xx}^{em*} & \alpha_{yx}^{em*} & \alpha_{zx}^{em*} & \alpha_{xx}^{m*} & \alpha_{xy}^{m*} & \alpha_{xz}^{m*} \\ \alpha_{xy}^{em*} & \alpha_{yy}^{em*} & \alpha_{zy}^{em*} & \alpha_{xy}^{m*} & \alpha_{yy}^{m*} & \alpha_{yz}^{m*} \\ \alpha_{xz}^{em*} & \alpha_{yz}^{em*} & \alpha_{zz}^{em*} & \alpha_{xz}^{m*} & \alpha_{yz}^{m*} & \alpha_{zz}^{m*} \end{pmatrix}.$$

В данных матрицах всего 21 независимый элемент. Поэтому достаточно составить 21 уравнение, которые получатся почленным приравнованием матриц из уравнения (1.3). Учитывая коэффициенты, составим

НАШУ СИСТЕМУ

$$\left\{ \begin{array}{l}
 |\alpha_{xx}^e|^2 + |\alpha_{xy}^e|^2 + |\alpha_{xz}^e|^2 + |\alpha_{xx}^{em}|^2 + |\alpha_{xy}^{em}|^2 + |\alpha_{xz}^{em}|^2 = \frac{6\pi}{k_d^3} \text{Im}(\alpha_{xx}^e) \\
 \alpha_{xx}^{e*} \alpha_{xy}^e + \alpha_{xy}^{e*} \alpha_{yy}^e + \alpha_{xz}^{e*} \alpha_{yz}^e + \alpha_{xx}^{em*} \alpha_{yx}^{em} + \alpha_{xy}^{em*} \alpha_{yy}^{em} + \alpha_{xz}^{em*} \alpha_{yz}^{em} = \frac{6\pi}{k_d^3} \text{Im}(\alpha_{xy}^e) \\
 \alpha_{xx}^{e*} \alpha_{xz}^e + \alpha_{xy}^{e*} \alpha_{yz}^e + \alpha_{xz}^{e*} \alpha_{zz}^e + \alpha_{xx}^{em*} \alpha_{zx}^{em} + \alpha_{xy}^{em*} \alpha_{zy}^{em} + \alpha_{xz}^{em*} \alpha_{zz}^{em} = \frac{6\pi}{k_d^3} \text{Im}(\alpha_{xz}^e) \\
 \alpha_{xx}^{e*} \alpha_{xx}^{em} + \alpha_{xy}^{e*} \alpha_{yx}^{em} + \alpha_{xz}^{e*} \alpha_{zx}^{em} - \alpha_{xx}^{em*} \alpha_{xx}^m - \alpha_{xy}^{em*} \alpha_{xy}^m - \alpha_{xz}^{em*} \alpha_{xz}^m = -i \frac{6\pi}{k_d^3} \text{Re}(\alpha_{xx}^{em}) \\
 \alpha_{xx}^{e*} \alpha_{xy}^{em} + \alpha_{xy}^{e*} \alpha_{yy}^{em} + \alpha_{xz}^{e*} \alpha_{zy}^{em} - \alpha_{xx}^{em*} \alpha_{xy}^m - \alpha_{xy}^{em*} \alpha_{yy}^m - \alpha_{xz}^{em*} \alpha_{yz}^m = -i \frac{6\pi}{k_d^3} \text{Re}(\alpha_{xy}^{em}) \\
 \alpha_{xx}^{e*} \alpha_{xz}^{em} + \alpha_{xy}^{e*} \alpha_{yz}^{em} + \alpha_{xz}^{e*} \alpha_{zz}^{em} - \alpha_{xx}^{em*} \alpha_{xz}^m - \alpha_{xy}^{em*} \alpha_{yz}^m - \alpha_{xz}^{em*} \alpha_{zz}^m = -i \frac{6\pi}{k_d^3} \text{Re}(\alpha_{xz}^{em}) \\
 |\alpha_{xy}^e|^2 + |\alpha_{yy}^e|^2 + |\alpha_{yz}^e|^2 + |\alpha_{yx}^{em}|^2 + |\alpha_{yy}^{em}|^2 + |\alpha_{yz}^{em}|^2 = \frac{6\pi}{k_d^3} \text{Im}(\alpha_{yz}^e) \\
 \alpha_{xy}^{e*} \alpha_{xz}^e + \alpha_{yy}^{e*} \alpha_{yz}^e + \alpha_{yz}^{e*} \alpha_{zz}^e + \alpha_{yx}^{em*} \alpha_{zx}^{em} + \alpha_{yy}^{em*} \alpha_{zy}^{em} + \alpha_{yz}^{em*} \alpha_{zz}^{em} = \frac{6\pi}{k_d^3} \text{Im}(\alpha_{yz}^e) \\
 \alpha_{xy}^{e*} \alpha_{xx}^{em} + \alpha_{yy}^{e*} \alpha_{yx}^{em} + \alpha_{yz}^{e*} \alpha_{zx}^{em} - \alpha_{yx}^{em*} \alpha_{xx}^m - \alpha_{yy}^{em*} \alpha_{xy}^m - \alpha_{yz}^{em*} \alpha_{xz}^m = -i \frac{6\pi}{k_d^3} \text{Re}(\alpha_{yx}^{em}) \\
 \alpha_{xy}^{e*} \alpha_{xy}^{em} + \alpha_{yy}^{e*} \alpha_{yy}^{em} + \alpha_{yz}^{e*} \alpha_{zy}^{em} - \alpha_{yx}^{em*} \alpha_{xy}^m - \alpha_{yy}^{em*} \alpha_{yy}^m - \alpha_{yz}^{em*} \alpha_{yz}^m = -i \frac{6\pi}{k_d^3} \text{Re}(\alpha_{yy}^{em}) \\
 \alpha_{xy}^{e*} \alpha_{xz}^{em} + \alpha_{yy}^{e*} \alpha_{yz}^{em} + \alpha_{yz}^{e*} \alpha_{zz}^{em} - \alpha_{yx}^{em*} \alpha_{xz}^m - \alpha_{yy}^{em*} \alpha_{yz}^m - \alpha_{yz}^{em*} \alpha_{zz}^m = -i \frac{6\pi}{k_d^3} \text{Re}(\alpha_{yz}^{em}) \\
 |\alpha_{xz}^e|^2 + |\alpha_{yz}^e|^2 + |\alpha_{zz}^e|^2 + |\alpha_{zx}^{em}|^2 + |\alpha_{zy}^{em}|^2 + |\alpha_{zz}^{em}|^2 = \frac{6\pi}{k_d^3} \text{Im}(\alpha_{zz}^e) \\
 \alpha_{xz}^{e*} \alpha_{xx}^{em} + \alpha_{yz}^{e*} \alpha_{yx}^{em} + \alpha_{zz}^{e*} \alpha_{zx}^{em} - \alpha_{zx}^{em*} \alpha_{xx}^m - \alpha_{zy}^{em*} \alpha_{xy}^m - \alpha_{zz}^{em*} \alpha_{xz}^m = -i \frac{6\pi}{k_d^3} \text{Re}(\alpha_{zx}^{em}) \\
 \alpha_{xz}^{e*} \alpha_{xy}^{em} + \alpha_{yz}^{e*} \alpha_{yy}^{em} + \alpha_{zz}^{e*} \alpha_{zy}^{em} - \alpha_{zx}^{em*} \alpha_{xy}^m - \alpha_{zy}^{em*} \alpha_{yy}^m - \alpha_{zz}^{em*} \alpha_{yz}^m = -i \frac{6\pi}{k_d^3} \text{Re}(\alpha_{zy}^{em}) \\
 \alpha_{xz}^{e*} \alpha_{xz}^{em} + \alpha_{yz}^{e*} \alpha_{yz}^{em} + \alpha_{zz}^{e*} \alpha_{zz}^{em} - \alpha_{zx}^{em*} \alpha_{xz}^m - \alpha_{zy}^{em*} \alpha_{yz}^m - \alpha_{zz}^{em*} \alpha_{zz}^m = -i \frac{6\pi}{k_d^3} \text{Re}(\alpha_{zz}^{em}) \\
 |\alpha_{xx}^{em}|^2 + |\alpha_{yx}^{em}|^2 + |\alpha_{zx}^{em}|^2 + |\alpha_{xx}^m|^2 + |\alpha_{xy}^m|^2 + |\alpha_{xz}^m|^2 = \frac{6\pi}{k_d^3} \text{Im}(\alpha_{xy}^m) \\
 \alpha_{xx}^{em*} \alpha_{xy}^{em} + \alpha_{yx}^{em*} \alpha_{yy}^{em} + \alpha_{zx}^{em*} \alpha_{zy}^{em} + \alpha_{xx}^m \alpha_{xy}^m + \alpha_{xy}^m \alpha_{yy}^m + \alpha_{xz}^m \alpha_{yz}^m = \frac{6\pi}{k_d^3} \text{Im}(\alpha_{xy}^m) \\
 \alpha_{xx}^{em*} \alpha_{xz}^{em} + \alpha_{yx}^{em*} \alpha_{yz}^{em} + \alpha_{zx}^{em*} \alpha_{zz}^{em} + \alpha_{xx}^m \alpha_{xz}^m + \alpha_{xy}^m \alpha_{yz}^m + \alpha_{xz}^m \alpha_{zz}^m = \frac{6\pi}{k_d^3} \text{Im}(\alpha_{xz}^m) \\
 |\alpha_{xy}^{em}|^2 + |\alpha_{yy}^{em}|^2 + |\alpha_{zy}^{em}|^2 + |\alpha_{xy}^m|^2 + |\alpha_{yy}^m|^2 + |\alpha_{yz}^m|^2 = \frac{6\pi}{k_d^3} \text{Im}(\alpha_{yy}^m) \\
 \alpha_{xy}^{em*} \alpha_{xz}^{em} + \alpha_{yy}^{em*} \alpha_{yz}^{em} + \alpha_{zy}^{em*} \alpha_{zz}^{em} + \alpha_{xy}^m \alpha_{xz}^m + \alpha_{yy}^m \alpha_{yz}^m + \alpha_{yz}^m \alpha_{zz}^m = \frac{6\pi}{k_d^3} \text{Im}(\alpha_{yz}^m) \\
 |\alpha_{xz}^{em}|^2 + |\alpha_{yz}^{em}|^2 + |\alpha_{zz}^{em}|^2 + |\alpha_{xz}^m|^2 + |\alpha_{yz}^m|^2 + |\alpha_{zz}^m|^2 = \frac{6\pi}{k_d^3} \text{Im}(\alpha_{zz}^m)
 \end{array} \right. .$$

При этом стоит отметить, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{xy}^e = \alpha_{yx}^e \\ \alpha_{xz}^e = \alpha_{zx}^e \\ \alpha_{yz}^e = \alpha_{zy}^e \\ \alpha_{xy}^m = \alpha_{yx}^m \\ \alpha_{xz}^m = \alpha_{zx}^m \\ \alpha_{yz}^m = \alpha_{zy}^m \\ \alpha_{yz}^{em} = -\alpha_{zy}^{me} \\ \alpha_{xy}^{em} = -\alpha_{yx}^{me} \\ \alpha_{xz}^{em} = -\alpha_{zx}^{me} \\ \alpha_{yx}^{em} = -\alpha_{xy}^{me} \\ \alpha_{zy}^{em} = -\alpha_{yz}^{me} \\ \alpha_{zx}^{em} = -\alpha_{xz}^{me} \\ \alpha_{xx}^{em} = -\alpha_{xx}^{me} \\ \alpha_{yy}^{em} = -\alpha_{yy}^{me} \\ \alpha_{zz}^{em} = -\alpha_{zz}^{me} \end{array} \right. .$$

Вместо правых частей данных равенств, полученных из уравнения (1.2), мы сразу подставили левые, чтобы уравнений было не 36, а 21.

2 Моделирование и мультипольное разложение

2.1 Равносторонняя треугольная призма

В данной работе мы исследуем электромагнитный отклик диэлектрической частицы в форме призмы с равносторонним треугольником в основании (рисунок 6). Для моделирования в COMSOL Multiphysics™ были выбраны следующие параметры: боковая сторона треугольника $a = 519.6$ нм, высота призмы $h = 188$, диэлектрическая проницаемость материала $\varepsilon_p = 12.67$, для окружающей среды $\varepsilon_d = 1$, рабочий диапазон длин волн - 900-1200 нм. Заметим, что диэлектрическая проницаемость материала исследуемой частицы близка по значению к диэлектрической проницаемости кремния в ближнем инфракрасном диапазоне [29].

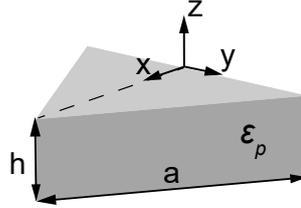


Рисунок 6 — Наночастица призматической формы с равносторонним треугольником в основании, помещенная в декартову систему координат. Боковая сторона $a = 519.6$ нм, высота вдоль оси z $h = 188$, диэлектрическая проницаемость материала $\varepsilon_p = 12.67$

Для расчета мультиполей использовались точные формулы из [30, 31]:

$$\begin{aligned}
 p_\alpha &= -\frac{1}{i\omega} \left\{ \int d^3\mathbf{r} J_\alpha^\omega j_0(kr) + \frac{k^2}{2} \int d^3\mathbf{r} \left[3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}_\omega) r_\alpha - r^2 J_\alpha^\omega \right] \frac{j_2(kr)}{(kr)^2} \right\} \\
 m_\alpha &= \frac{3}{2} \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{J}_\omega)_\alpha \frac{j_1(kr)}{kr} \\
 Q_{\alpha\beta}^e &= -\frac{3}{i\omega} \left\{ \int d^3\mathbf{r} \left[3(r_\beta J_\alpha^\omega + r_\alpha J_\beta^\omega) - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}_\omega) \delta_{\alpha\beta} \right] \frac{j_1(kr)}{kr} \right\} \\
 Q_{\alpha\beta}^m &= 15 \int d^3\mathbf{r} \left\{ r_\alpha (\mathbf{r} \times \mathbf{J}_\omega)_\beta + r_\beta (\mathbf{r} \times \mathbf{J}_\omega)_\alpha \right\} \frac{j_2(kr)}{(kr)^2},
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\alpha, \beta = x, y, z$; $j_0(kr), j_1(kr), j_2(kr)$ - сферические функции Бесселя.

Проверим, работает ли для описания нашей системы модель, представленная уравнениями (1.1) и (1.2). Сначала надо понять, достаточно ли дипольного приближения для анализа отклика выбранной нами частицы. Как видно из рисунка 7, нормированные на площадь описанной окружности дипольные вклады в сечение рассеяния значительно превышают квадрупольные почти во всем рассматриваемом диапазоне, исключая малую область в коротковолновой зоне.

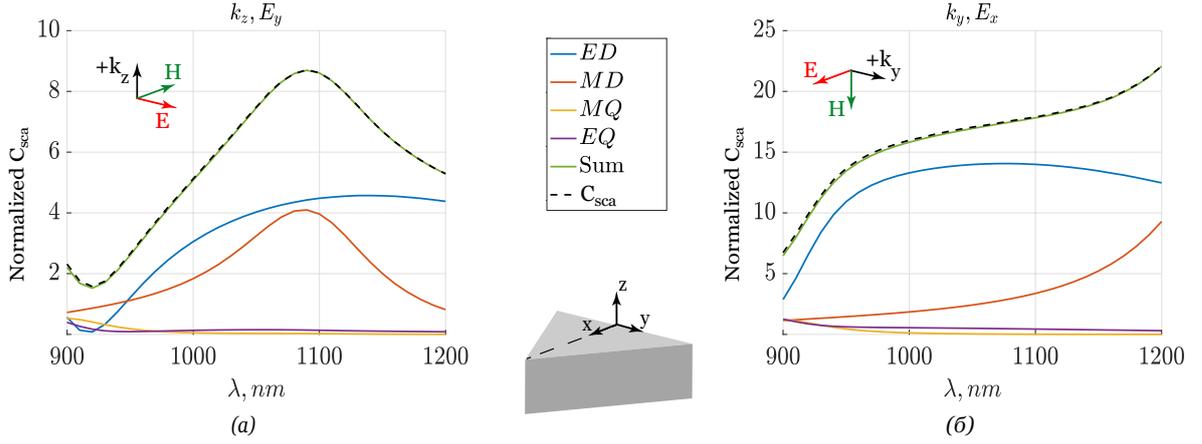


Рисунок 7 — Нормированное сечение рассеяния и соответствующие мультипольные вклады электрического диполя (ED), магнитного диполя (MD), электрического квадрупольного (EQ) и магнитного квадрупольного (MQ) членов. Падающие плоские волны с (а) у-поляризацией распространяются вдоль оси z и (б) х-поляризацией распространяются вдоль оси y

Далее, чтобы убедиться, что соотношения (1.2) выполняются, применим метод расчета коэффициентов поляризуемостей, представленный в работе [32]. Для этого мы рассмотрим электрические и магнитные диполи, возбужденные в нашей призме плоскими волнами разных конфигураций. Поскольку волновой вектор, электрическое и магнитное поля падающей волны образуют правую тройку, если мы сохраним направление амплитуды электрического поля, но повернем волновой вектор на 180° градусов, направление амплитуды магнитного поля также повернется на 180° градусов (изменит знак). На рисунке 8 (а) показано, что для у-поляризованной волны, распространяющейся вдоль направления z и $-z$, магнитный диполь в отклике частицы имеет только компоненту, параллельную магнитному полю падающей волны (вдоль оси x). При этом

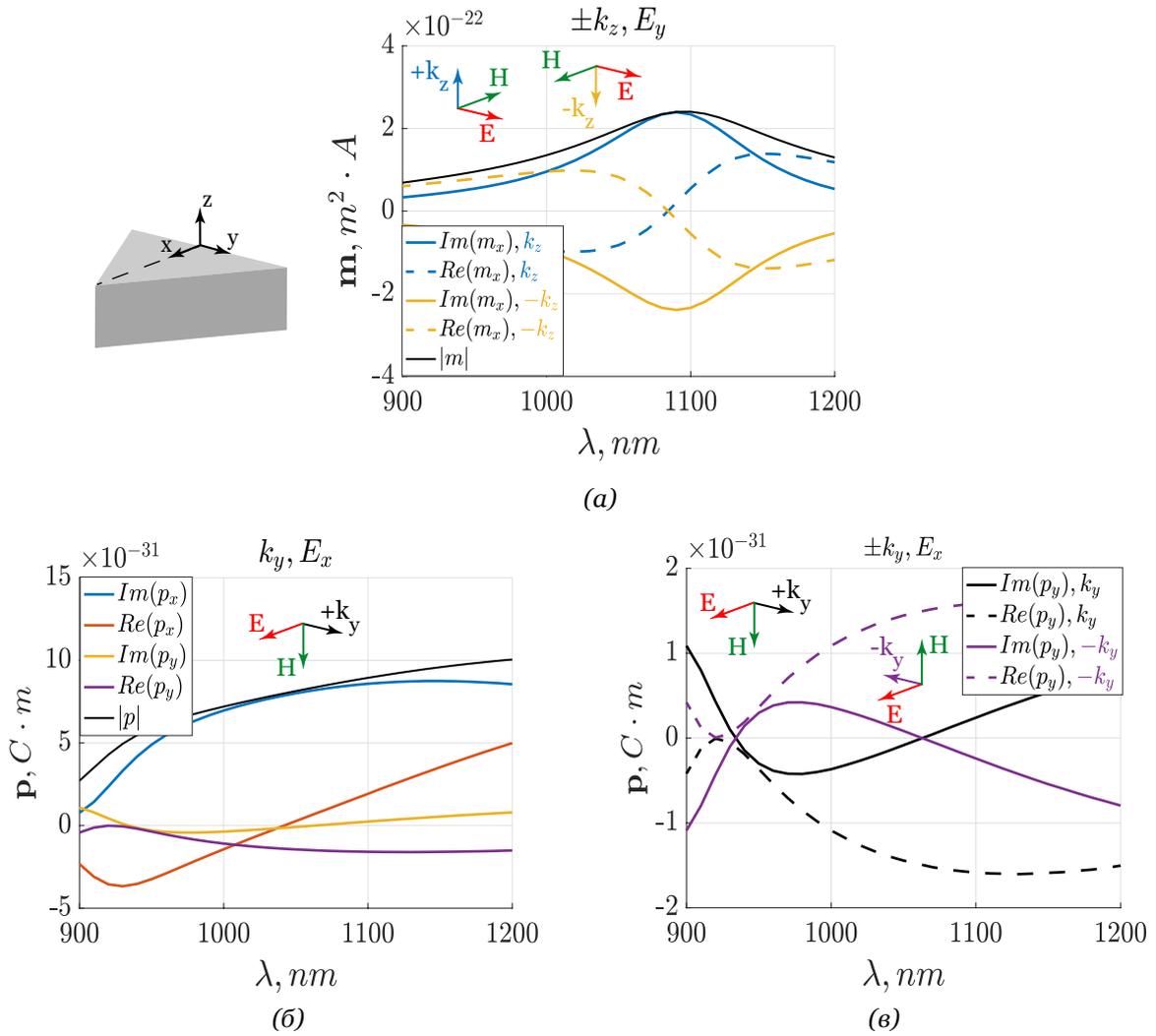


Рисунок 8 — Ненулевые компоненты (а) магнитного диполя для у-поляризованной волны, падающей вдоль z, (б) электрического диполя для x-поляризованной волны, падающей вдоль y, (с) бианизотропный электрический диполь вдоль y для x-поляризованной волны, падающей вдоль y и -y в отклике наночастицы призматической формы с равносторонним треугольником в основании. Дипольные моменты рассчитываются относительно центра масс призмы

для данных случаев магнитный диполь сохраняет свой модуль, но меняет знак, как и магнитное поле. Это говорит нам о том, что магнитный диполь зависит только от падающего магнитного поля. Тогда, используя уравнение (1.1), мы приходим к выводу, что $\alpha_{zy}^{HE} = 0$. Следовательно, из уравнения (1.2) получаем, что $\alpha_{yz}^{EH} = 0$. Но на рисунке 8 (б) видно, что для x-поляризованной волны, падающей по y, у электрического диполя возбуждается компонента не только вдоль электрического поля (x), но и вдоль направления падения y. Далее, облучив нашу частицу также из

направления $-y$ с сохранением поляризации, получаем, что возбуждающиеся бианизотропные компоненты электрического диполя, параллельные оси y , имеют одинаковый модуль, но при этом разный знак. Данный эффект продемонстрирован на рисунке 8 (в). Из этого можно сделать вывод, что данные компоненты электрического диполя для облучения по y и $-y$ зависят от магнитного падающего поля. То есть $\alpha_{yz}^{EH} \neq 0$.

Аналогичные рассуждения проводим для другой пары конфигураций плоских волн (k_z, E_x) и (k_y, E_z) . Из рисунка 9 видно, что для этих двух случаев дипольные вклады в сечение рассеяния частицы также значительно больше квадрупольных почти во всем рассматриваемом диапазоне, исключая малую область в коротковолновой зоне. Таким образом, для нашей системы под воздействием рассматриваемых конфигураций плоских волн применима дипольная модель.

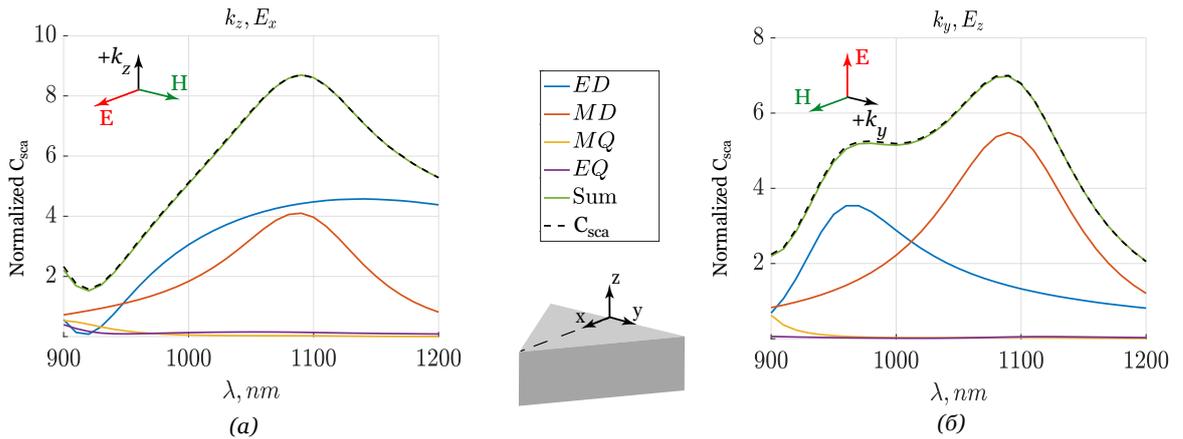


Рисунок 9 — Нормированное сечение рассеяния и соответствующие мультипольные вклады электрического диполя (ED), магнитного диполя (MD), электрического квадрупольного (EQ) и магнитного квадрупольного (MQ) членов. Падающие плоские волны с (а) x -поляризацией распространяются вдоль оси z и (б) z -поляризацией распространяются вдоль оси y

Далее, из рисунка 10 (а) видно, что при облучении нашей системы плоскими волнами (k_z, E_x) и $(-k_z, E_x)$, электрический диполь возбуждается только вдоль падающего электрического поля (x). При этом для повернутых друг относительно друга на 180° градусов направлений падения диполи не меняют ни модуль, ни знак. То есть зависят только от падающего электрического поля. Таким образом, $\alpha_{zy}^{EH} = 0$. Тогда из урав-

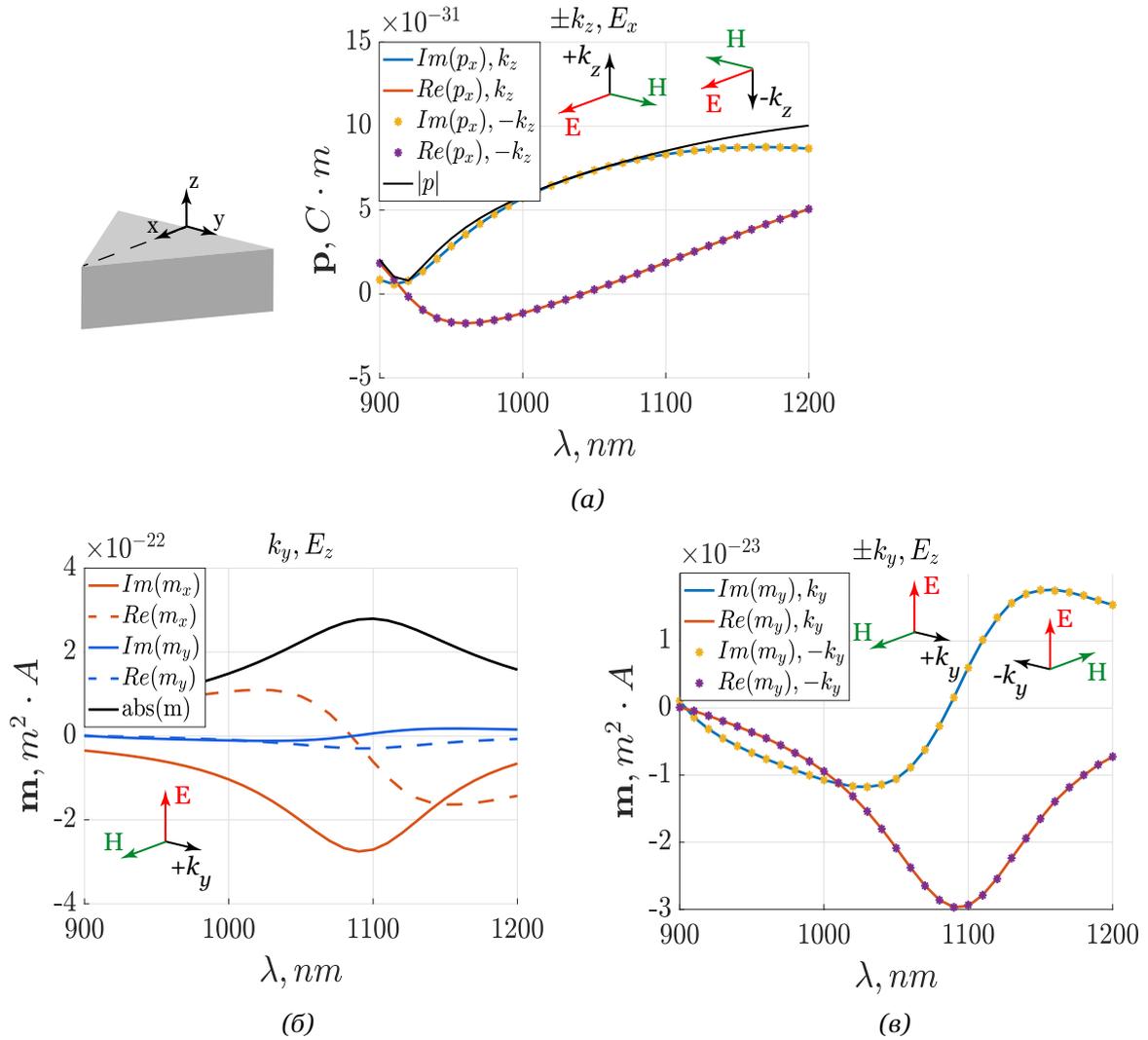


Рисунок 10 — Ненулевые компоненты (а) электрического диполя для x-поляризованной волны, падающей вдоль z, (б) магнитного диполя для z-поляризованной волны, падающей вдоль y, (в) бианизотропного магнитного диполя вдоль y для z-поляризованной волны, падающей вдоль y и -y в отклике наночастицы призматической формы с равносторонним треугольником в основании. Черная линия отвечает за полное значение возбуждаемого диполя. Дипольные моменты рассчитываются относительно центра масс призмы

нения (1.2) мы получаем, что $\alpha_{yz}^{HE} = 0$. Но из рисунка 10 (б) видно, что у магнитного диполя при облучении плоской волной (k_y, E_z) возбуждается компонента не только вдоль магнитного поля (x), но и вдоль направления падения (y). Анализируя также отклик частицы при воздействии плоской волной $(-k_y, E_z)$, из рисунка 10 (в) видим, что бианизотропные компоненты магнитного диполя вдоль y для обоих направлений падения

имеют одинаковый знак и модуль, то есть зависят от падающего электрического поля. Отсюда получаем, что $\alpha_{zy}^{HE} \neq 0$.

Следовательно, мы получаем противоречие относительно кросс-поляризуемостей α_{yz}^{EH} и α_{zy}^{EH} , указывающее на неприменимость модели, выраженной уравнением (1.1), для наночастицы в форме равносторонней треугольной призмы. Однако, обратим внимание на то, что принцип Онзагера-Казимира должен работать для любых систем, обладающих взаимностью. Таким образом, дипольное приближение с локальными электрическими и магнитными полями и учетом бианизотропии недостаточно для описания электромагнитного отклика нашей системы, и необходимо рассмотреть отклик на пространственные производные плоской электромагнитной волны ([27, 11]).

2.2 Равнобедренная треугольная призма

Также в данной работе мы исследовали свойства диэлектрической частицы в форме призмы с равнобедренным треугольником в основании. Для моделирования были выбраны следующие параметры: боковая сторона $a = 683.9$ нм, высота призмы $h = 188$ нм, диэлектрическая проницаемость материала $\epsilon_p = 12.67$ (рисунок 6), диэлектрическая проницаемость окружающей среды $\epsilon_d = 1$, рабочий диапазон длин волн – 900-1200 нм. Угол при вершине треугольника основания равен 30° .

Сравним результаты, полученные для призм с равносторонним и равнобедренным треугольниками в основании для одинаковых конфигураций длин волн. Рассмотрим отклик равнобедренной призмы на волну с волновым вектором вдоль z . Как видно из рисунка 11 (а) для y -поляризованной волны, падающей по z , y магнитного диполя появляется неосновная компонента, направленная вдоль падения света, а не вдоль магнитного поля. Заметим, что для данной поляризации в равносторонней призме y магнитного диполя возбуждалась только основная компонента, осциллирующая вдоль x (рисунок 8 (а)). Аналогичная ситуация наблюдается и для x -поляризованной волны с волновым вектором вдоль z . Для равносторонней призмы y электрического диполя не возбуждалось неосновных компонент (рисунок 10 (а)), а для призмы с равнобедренным тре-

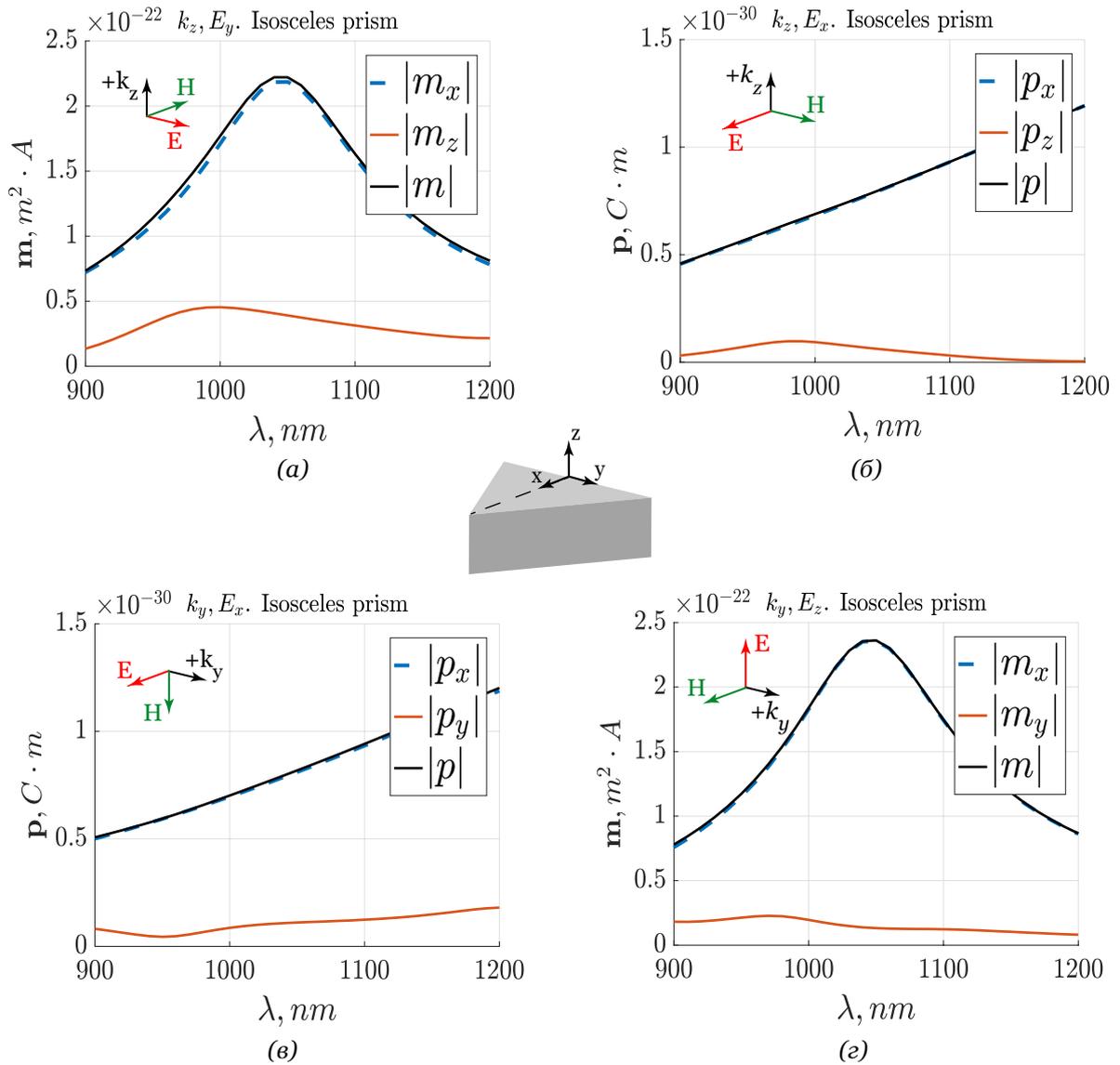


Рисунок 11 — Абсолютные значения ненулевых компонент (а) электрического диполя для x-поляризованной волны, падающей вдоль z, (б) магнитного диполя для y-поляризованной волны, падающей вдоль z, (в) электрического диполя для x-поляризованной волны, падающей вдоль y, (г) магнитного диполя для z-поляризованной волны, падающей вдоль y. Дипольные моменты рассчитываются относительно центра масс призмы

угольником в основании помимо компоненты вдоль электрического поля появляется также компонента вдоль направления падения, что можно увидеть на рисунке 11 (б). При боковом падении света (волновой вектор направлен по y) для x-поляризации возбуждается неосновная компонента электрического диполя, а для y-поляризации магнитного, что продемонстрировано на рисунках 11 (в),(г). Для равносносторонней призмы при боковом падении ситуация аналогична (рисунок 8 (б),10 (б)).

Таким образом, получилось, что для равнобедренной призмы в отличие от равносторонней при падении света на основание (вдоль оси z) возбуждаются неосновные компоненты диполей. Данный эффект наглядно продемонстрирован на рисунке 12. На графиках представлен спектр

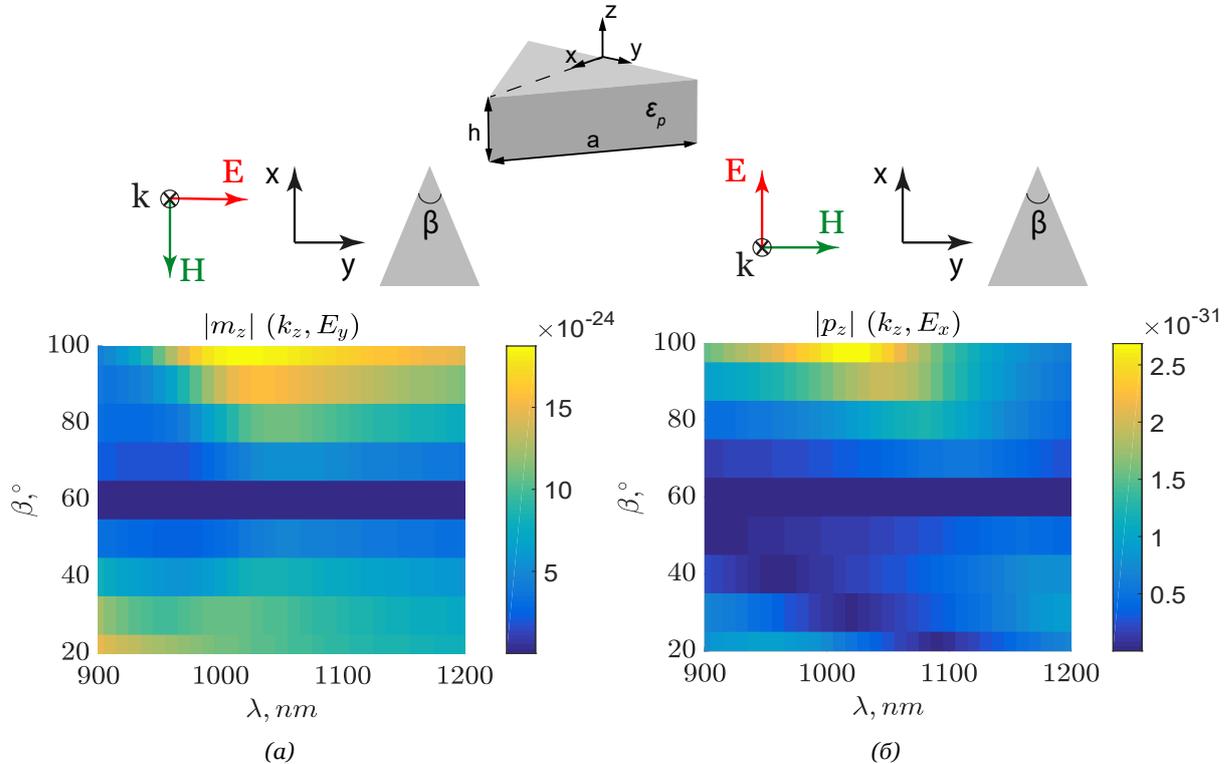


Рисунок 12 — Абсолютные значения продольной (параллельной направлению распространения волн) z -компоненты (а) магнитного m_z и (б) электрического p_z дипольного момента для кремниевых призм, облученных плоскими волнами, распространяющимися вдоль оси z и имеющими электрическую поляризацию вдоль оси (а) y и (б) x . По оси ординат на данных графиках представлен угол при вершине основания призм β . Для наглядности в виде вставок над основными рисунками приведена ориентация частицы относительно декартовой системы координат и конфигурации плоских волн. Дипольные моменты рассчитываются относительно центра масс призмы

возбуждающихся продольных компонент (вдоль направления падения) магнитного (а) и электрического (б) диполей при изменении угла при вершине треугольника основания призмы. Заметим, что при рассмотрении призм с разными углами мы сохраняли объем, чтобы интересующие нас резонансы оставались в том же диапазоне длин волн. Кроме того сравнение имеет смысл при рассмотрении воздействия света с одинаковым количеством вещества. На рисунке 12 (а) видно, что при падении

на призму у-поляризованной волны с волновым вектором вдоль z продольная компонента магнитного диполя равна 0 на всех длинах волн при $\beta = 60^\circ$, то есть для равносторонней призмы, что и было получено в подразделе 2.1. При этом, чем больше угол β отличается от 60° , тем более ярко выраженной становится неосновная компонента магнитного диполя m_z . Аналогичная ситуация наблюдается на рисунке 12 (б) для х-поляризованной волны, падающей вдоль z , и возбуждающейся в призме под действием данного излучения неосновной компоненты электрического диполя p_z .

Далее в этой работе, чтобы разрешить указанное выше противоречие относительно коэффициентов поляризуемости в случае равносторонней призмы и объяснить оптические свойства обеих призм, мы используем комбинированный метод, включающий анализ симметрии и мультипольную классификацию собственных мод.

3 Теоретический анализ

3.1 Мультипольный анализ собственных мод

В данном подразделе мы используем общий подход для описания электромагнитного отклика наших частиц, представленный в работах [24, 33]. Ключевая идея предлагаемого метода основана на теореме Вигнера, которая гласит, что собственные моды преобразуются согласно неприводимым представлениям группы симметрии резонатора. Каждому уровню энергии соответствует одно из неприводимых представлений, а степень вырождения равна размерности неприводимого представления [34, 35]. Следовательно, чтобы определить мультипольный состав каждой собственной моды интересующей нас частицы, мы должны разделить мультиполи в соответствии с неприводимыми представлениями группы симметрии, соответствующей геометрии нашей частицы.

Таким образом, первым шагом мультипольного анализа собственных мод отдельной частицы является определение группы симметрии, соответствующей ее геометрии. Затем, пользуясь таблицей характеров [36, 37], мы находим неприводимые представления группы и сферические функции Y_ℓ^m , которые преобразуются по каждому представлению. Ниже приведено выражение для скалярных сферических гармоник [38]

$$Y_\ell^m = (-1)^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos\theta), \quad (3.1)$$

где P_ℓ^m - присоединенные полиномы Лежандра. Отсюда мы получаем вещественные сферические гармоники, соответствующие каждому неприводимому представлению, используя следующие соотношения

$$Y_{\ell m} = \begin{cases} \sqrt{2}(-1)^m \operatorname{Re} [Y_\ell^m] & m > 0 \\ Y_\ell^0 & m = 0 \\ \sqrt{2}(-1)^m \operatorname{Im} [Y_\ell^{|m|}] & m < 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Далее мы сопоставляем вещественным сферическим гармоникам векторные (коротко будем обозначать **ВСГ** -векторные сферические гар-

моники) - электрические (обычно обозначаются \mathbf{N}) и магнитные (обычно обозначаются \mathbf{M}) (подробная информация о ВСГ в [39]). Определение векторных сферических гармоник

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{(e,o)mn} &= \nabla \times (\mathbf{r}\psi_{(e,o)mn}) \\ \mathbf{N}_{(e,o)mn} &= \frac{\nabla \times \mathbf{M}_{(e,o)mn}}{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{eml} &= P_\ell^m(\cos \theta) z_n(kr) \cos m\varphi \\ \psi_{oml} &= P_\ell^m(\cos \theta) z_n(kr) \sin m\varphi,\end{aligned}\tag{3.3}$$

где $\psi_{(e,o)ml}$ - решения скалярного уравнения Гельмгольца с волновым вектором k , $z_n(kr)$ - любая из трех типов сферических функций Бесселя, m целое и $m \geq 0$. Как видно из уравнений (3.1), (3.2) и (3.3), функции $\psi_{(e,o)ml}$ пропорциональны вещественным скалярным сферическим гармоникам

$$\begin{aligned}\psi_{eml} &= \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} Y_{\ell m} z_n(kr) & m > 0 \\ \psi_{e0l} &= \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{2}{2\ell+1}} Y_{\ell 0} z_n(kr) & m = 0 \\ \psi_{o|m|\ell} &= \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+|m|)!}{(\ell-|m|)!}} Y_{\ell m} z_n(kr) & m < 0.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Таким образом, мы получили соответствие между ВСГ и скалярными сферическими функциями. Из приведенных выше рассуждений мы можем сформулировать следующее правило: при вращении электрические и магнитные ВСГ ведут себя так же как скалярные, однако при отражениях \mathbf{N} ведут себя как скалярные сферические гармоники, в то время как \mathbf{M} имеют противоположную четность [40]. Следовательно, электрические ВСГ преобразуются по тем же представлениям что и скалярные с теми же ℓ и m , что и у вещественной скалярной гармоники, принадлежащей тому или иному представлению, первый символ в обозначении ВСГ (е или о) определяется через уравнение (3.4) по знаку m . Магнитные ВСГ преобразуются по представлениям, у которых характеры при поворотах такие же как для скалярных, а при отражениях противоположные. Поскольку каждая ВСГ преобразуется только по одному неприводимому представлению, (исключение составляют, например, группы T_d, O_h , где

иногда приходится составлять линейные комбинации из ВСГ [41]), мы можем распределить все ВСГ по представлениям.

Подводя итог, мы распределили векторные сферические гармоники согласно неприводимым представлениям точечной группы симметрии. Поскольку каждое одномерное представление соответствует одной собственной моде, мы определили мультипольный состав таких собственных мод. Однако из теоремы Вигнера мы знаем, что любое N -мерное представление соответствует N вырожденным ортогональным собственным модам. Зачастую вырожденные моды можно выделить так, чтобы они были ортогональны, то есть таким образом, чтобы каждый мультиполь входил только в одну из мод. В нашей задаче так сделать удастся. Для этой цели мы берем любые две ВСГ, которые преобразуются в соответствии с этим представлением, и оцениваем интеграл их скалярного произведения по объему интересующей нас частицы

$$\int_V \mathbf{W}_s(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{W}_{s'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (3.5)$$

где \mathbf{W}_s и $\mathbf{W}_{s'}$ - ВСГ, принадлежащие рассматриваемому N -мерному неприводимому представлению (где $N \geq 2$), V - объем рассматриваемой частицы. Если этот интеграл равен 0, то \mathbf{W}_s и $\mathbf{W}_{s'}$ принадлежат разным собственным модам и наоборот. Метод оценивания интеграла из уравнения (3.5) приведен в [24].

3.2 Разложение плоских волн по векторным сферическим гармоникам

Чтобы понять, какие моды возбуждаются той или иной падающей волной, необходимо знать ее мультипольный состав. Рассмотрим мультипольное разложение плоских волн различной конфигурации. Подробная инструкция, как получить бесконечный ряд мультиполей, входящих в ту или иную плоскую волну, с коэффициентами разложения дана в учебнике [39]. Однако мы выбрали несколько иной подход. Воспользуемся ответом, полученным на странице 106 для плоской волны с поляризаци-

ей x , падающей по оси z (k_z, E_x)

$$\mathbf{E}_i = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\mathbf{M}_{o1n}^{(1)} - i\mathbf{N}_{e1n}^{(1)} \right). \quad (3.6)$$

Графическую интерпретацию уравнения (3.6) можно увидеть в первой строке рисунка 13 (на рисунке 13 представлено разложение плоской вол-

Plane wave	Spherical Multipoles				
	Electric		Magnetic		
k_z, E_x	N_{e11} 	N_{e12} 	M_{o11} 	M_{o12} 	...
k_z, E_y	N_{o11} 	N_{o12} 	M_{e11} 	M_{e12} 	...
k_y, E_x	N_{e11} 	N_{o22} 	M_{e01} 	M_{o12} 	...
k_y, E_z	N_{e01} 	N_{o12} 	M_{e11} 	M_{o22} 	...
k_x, E_y	N_{o11} 	N_{o22} 	M_{e01} 	M_{e12} 	...
k_x, E_z	N_{e01} 	N_{e12} 	M_{o11} 	M_{o22} 	...

Рисунок 13 — Мультипольное разложение различных конфигураций плоских волн до квадрупольей. Желтым цветом изображены электрические гармоники, синим - магнитные. Форма фигуры иллюстрирует угловое распределение электрического поля в дальней зоне, стрелки отвечают за поляризацию поля, излучаемого в данном направлении

ны до квадрупольей). Затем, используя D-матрицы Вигнера, мы вращаем

мультиполи в соответствии с вращением конфигурации плоских волн. Однако в нашей задаче требуется знать разложение плоской волны только с точностью до квадрупольей. Для этого мы можем просто мысленно (пользуясь графическими изображениями диаграмм направленности) поворачивать наши мультиполи и получать мультипольный состав различных конфигураций плоских волн. Например, для получения состава u -поляризованной плоской волны с k -вектором вдоль z мы поворачиваем мультиполи первой строки на 90 градусов вокруг оси z и получаем вторую строку таблицы на рисунке 13. Прделав то же самое для других конфигураций, мы получим таблицу разложения плоских волн по сферическим гармоникам до квадрупольей на рисунке 13.

После того как мы получили разложение плоских волн по сферическим гармоникам, надо провести модовый анализ интересующей нас частицы с помощью метода, описанного в подразделе 3.1. Потому что если в падающем излучении присутствует хотя бы один мультиполь, входящий в состав одной или нескольких собственных мод, то данные моды возбуждятся [42]. Заметим, что рассматриваемая теория работает для любых конфигураций падающего излучения.

3.3 Симметричный анализ равносторонних призм

Призма с равносторонним треугольником в основании (рисунок 6) отвечает группе симметрии D_{3h} . Зная скалярные сферические гармоники, преобразующиеся по каждому неприводимому представлению данной группы симметрии из [36], мы используем метод, описанный в подразделе 3.1, чтобы распределить ВСГ по неприводимым представлениям. После этого надо разделить ВСГ, принадлежащие N -мерным представлениям (где $N \geq 2$) на N мод, оценивая интеграл из уравнения (3.5). В интересующей нас группе есть два двумерных неприводимых представления: E' и E'' (все остальные представления одномерны). Плоскость симметрии призмы, расположенной как на рисунке 6, $y = 0$, является также плоскостью, от которой отсчитывается угол ϕ в сферической системе координат. Таким образом, так как все ВСГ обладают определенной четностью относительно отражения в этой плоскости (то же, что и преобразование

$\phi \rightarrow -\phi$ ([24]), мы заключаем, что вырожденные представления можно разделить на две моды по простому принципу: четные электрические ВСГ N_{elm} и магнитные ВСГ M_{olm} относятся к одной моде, а нечетные электрические N_{olm} и магнитные M_{elm} ВСГ относятся к другой. Это связано с тем, что у электрических и магнитных ВСГ разная четность при отражениях. Из приведенных выше рассуждений мы получаем таблицу ВСГ, разделенных между собственными модами рассматриваемой призмы, которая показана на рисунке 14.

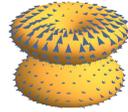
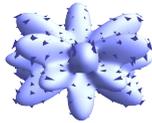
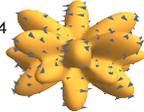
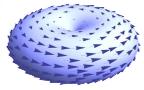
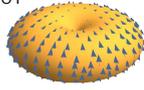
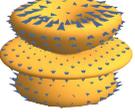
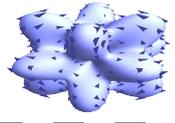
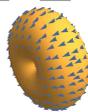
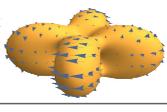
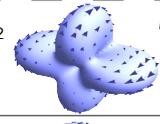
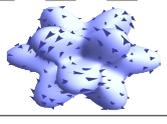
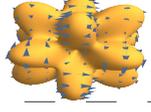
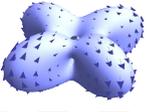
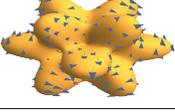
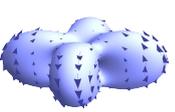
 D_{3h}	Spherical Multipoles			
	Electric		Magnetic	
$A_1'(1)$	N_{e02} 	N_{e33} 	M_{o34} 	...
$A_1''(1)$	N_{o34} 		M_{e02} 	M_{e33} 
$A_2'(1)$	N_{o33} 		M_{e01} 	M_{e03} 
$A_2''(1)$	N_{e01} 	N_{e03} 	M_{o33} 	...
$E'(2)$	N_{o11} 	N_{o22} 	M_{e12} 	M_{e23} 
	N_{e11} 	N_{e22} 	M_{o12} 	M_{o23} 
$E''(2)$	N_{e12} 	N_{e23} 	M_{o11} 	M_{o22} 
	N_{o12} 	N_{o23} 	M_{e11} 	M_{e22} 

Рисунок 14 — Мультипольный состав собственных мод призмы с симметрией D_{3h} . Желтым цветом изображены электрические гармоники, синим - магнитные. Форма фигуры иллюстрирует угловое распределение электрического поля в дальней зоне, стрелки отвечают за поляризацию поля, излучаемого в данном направлении

Другой способ разделить ВСГ, преобразующиеся по представлениям размерности больше 1, между модами - разложить скалярное произведение всех возможных пар ВСГ, принадлежащих этому представлению, в сумму скалярных сферических гармоник. Как это сделать, подробно описано в [24]. Если эта сумма содержит хотя бы одну скалярную гармонику, которая преобразуется по инвариантному представлению, то интеграл по объему призмы не равен нулю, и обе ВСГ принадлежат одной моде и наоборот.

На рисунке 8 (б) для х-поляризованной падающей вдоль y волны видно, что электрический диполь возбуждается в призме не только вдоль направления падающего электрического поля, но и вдоль направления падения. Это можно объяснить с помощью мультипольного анализа собственных мод. Во-первых, из таблицы на рисунке 13 мы видим, что плоская волна (k_y, E_x) содержит следующие мультиполи: $\mathbf{N}_{e11}, \mathbf{N}_{o22}, \mathbf{M}_{e01}, \mathbf{M}_{o12}$. Соответствие декартовых диполей и сферических ВСГ очевидно: $\mathbf{N}_{e11} \rightarrow p_x, \mathbf{N}_{o11} \rightarrow p_y, \mathbf{N}_{e01} \rightarrow p_z$. Однако связь ВСГ и декартовых мультиполей старшего порядка гораздо сложнее [43]. Но обсуждение соответствий сферических и декартовых мультиполей старших порядков выходит за рамки данной работы и не влияет на полученные результаты. Из рисунка 14 мы видим, что конфигурация (k_y, E_x) возбуждает следующие собственные моды: A'_2 и обе моды представления E' . Одна из двух мод представления E' возбуждается электрическим квадруполем \mathbf{N}_{o22} , а вторая - электрическим диполем $\mathbf{N}_{e11}(p_x)$. Стоит обратить внимание на то, что мода, возбуждаемая квадруполем, содержит электрический диполь $\mathbf{N}_{o11}(p_y)$, поэтому он также будет возбужден. Отметим, что y -компонента электрического диполя возбуждается из-за наличия электрического квадруполя в падающей плоской волне и не появится, если возбуждение содержит только дипольные вклады. При этом на рисунке 10 (а) показано, что плоская волна (k_z, E_y) возбуждает в частице магнитный диполь только с компонентной вдоль падающего магнитного поля. Из таблицы на рисунке 13 видно, что (k_z, E_y) содержит следующие мультиполи: $\mathbf{N}_{o11}, \mathbf{N}_{o12}, \mathbf{M}_{e11}, \mathbf{M}_{e12}$. Тогда по таблице распределения ВСГ по собственным модам равнобедренной призмы на рисунке

14 мы понимаем, что такая конфигурация плоской волны возбуждит по одной моде, соответствующей представлениям E' и E'' . Как видно из рисунка, в составе возбуждаемых (k_z, E_y) собственных мод нет диполей кроме тех, что содержатся в падающей волне. Приведенный выше анализ говорит нам о том, что результаты моделирования из главы 2 верны.

Рассмотрим также плоскую волну (k_y, E_z) . Из рисунка 10 (б) видно, что у магнитного диполя появляется компонента, направленная вдоль падения света, а не вдоль падающего магнитного поля. Из таблицы на рисунке 13 мы видим, что плоская волна данной конфигурации содержит следующие мультиполи: $\mathbf{N}_{e01}, \mathbf{N}_{o12}, \mathbf{M}_{e11}, \mathbf{M}_{o22}$. То есть (k_y, E_z) возбуждает моду представления A''_2 и обе моды представления E'' . Мо- да, содержащая "бианизотропный" диполь $\mathbf{M}_{o11}(m_y)$, возбуждается квад- руполем \mathbf{M}_{o22} . Следовательно, рассмотрение только дипольных членов падающей волны не было достаточно для выбранной геометрии и разме- ров частицы. При этом для плоской волны (k_z, E_x) путем компьютерного моделирования было получено, что у электрического диполя в отклике есть только основная компонента, направленная вдоль электрического поля, то есть по x . Из таблиц на рисунке 13 и рисунке 14 мы находим этому подтверждение. Действительно, (k_z, E_x) содержит в своем мульт- типольном составе: $\mathbf{N}_{e11}, \mathbf{N}_{e12}, \mathbf{M}_{o11}, \mathbf{M}_{o12}$. То есть возбуждает по одной моде, соответствующей представлениям E' и E'' . И данные моды не со- держат в себе диполей кроме тех, которые есть в самой падающей плос- кой волне.

Заметим, что в таблице на рисунке 14 ни одна мода не содержит в себе хотя бы двух диполей. Следовательно, диполь в электромагнитном отклике треугольной призмы с равносторонним треугольником в основа- нии возникает из-за его наличия в падающем излучении или возбужда- ется более старшими мультиполями. Иными словами, классическое опре- деление бианизотропии (подраздел 1.1) не применимо для выбранной нами симметрии при воздействии света любой конфигурации, поскольку никакой электрический диполь нельзя возбудить никаким магнитным диполем, входящим в разложение падающего поля, и наоборот.

Таким образом, в данном подразделе мы проанализировали модовый состав частицы призматической формы с равносторонним треугольником в основании и убедились в правильности полученных в главе 2 результатов моделирования. Мы доказали, что для анализа отклика выбранной нами частицы необходимо рассматривать вклады более старших мультиполей в плоскую волну.

3.4 Симметричный анализ равнобедренных призм

Призма с равнобедренным треугольником в основании, расположенная так, как показано на рисунке 6, соответствует группе симметрии C_{2v} . В данной группе симметрии нет представлений размерности больше 1, и, следовательно, нам не требуется оценивать никаких интегралов. Чтобы понять, какие ВСГ преобразуются по каким неприводимым представлениям данной группы симметрии, нам надо просто использовать метод, подробно описанный в подразделе 3.1, и тогда мы получим таблицу на рисунке 15.

Рассмотрим конфигурацию (k_y, E_x) . Как уже было отмечено раньше, данная плоская волна содержит следующие мультиполи: $\mathbf{N}_{e11}, \mathbf{N}_{o22}, \mathbf{M}_{e01}, \mathbf{M}_{o12}$. Из рисунка 15 видно, что при воздействии данной конфигурации на призму с равнобедренным треугольником в основании возбуждаются моды, соответствующие представлениям A_1 и B_2 . Мода B_2 содержит не только магнитный диполь $\mathbf{M}_{e01}(m_z)$ из падающей плоской волны, но и электрический диполь $\mathbf{N}_{o11}(p_y)$. Следовательно, электромагнитный отклик призмы с равнобедренным треугольником в основании можно назвать бианизотропным в его обычном понимании (уравнение 1.1). Аналогичная ситуация наблюдается и для случая (k_y, E_z) . Из таблицы на рисунке 15 получается, что данная плоская волна возбудит в частице моды представлений A_2 и B_1 . В моде B_1 содержится диполь $\mathbf{M}_{o11}(m_y)$, которого не было в плоской волне.

Также интересно посмотреть на отклик рассматриваемой частицы на плоскую волну (k_z, E_y) , которая содержит $\mathbf{N}_{o11}, \mathbf{N}_{o12}, \mathbf{M}_{e11}, \mathbf{M}_{e12}$. Как было показано в предыдущем подразделе, данная плоская волна не возбуждает в призме с равносторонним треугольником в основании ди-

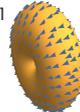
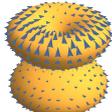
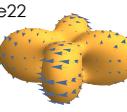
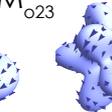
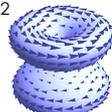
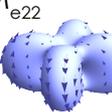
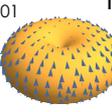
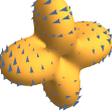
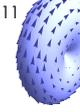
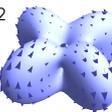
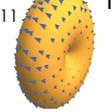
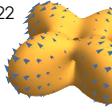
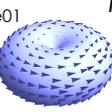
 C_{2v}	Spherical Multipoles	
	Electric	Magnetic
$A_1(1)$	N_{e11}  N_{e02}  N_{e22} 	M_{o12}  M_{o23} 
$A_2(1)$	N_{o12}  N_{o23} 	M_{e11}  M_{e02}  M_{e22} 
$B_1(1)$	N_{e01}  N_{e12} 	M_{o11}  M_{o22} 
$B_2(1)$	N_{o11}  N_{o22} 	M_{e01}  M_{e12} 

Рисунок 15 — Мультипольный состав собственных мод призмы с симметрией C_{2v} . Желтым цветом изображены электрические гармоники, синим - магнитные. Форма фигуры иллюстрирует угловое распределение электрического поля в дальней зоне, стрелки отвечают за поляризацию поля, излучаемого в данном направлении

полей, которых не было в плоской волне. Но в призме с равнобедренным треугольником в основании ситуация меняется. Из рисунка 15 видно, что (k_z, E_y) возбуждает моды, соответствующие представлениям B_2 и A_2 . В моде B_2 содержится не только $\mathbf{N}_{o11}(p_y)$ из падающей волны, но также и $\mathbf{M}_{e01}(m_z)$. То есть при облучении данной плоской волной нашей частицы, магнитный диполь будет иметь не только основную компоненту $\mathbf{M}_{e11}(m_x)$, но также и бианизотропную компоненту $\mathbf{M}_{e01}(m_z)$, направленную вдоль падения волны. Аналогично, при воздействии (k_z, E_x) возбуждаются моды B_1 и A_1 , и B_1 содержит в себе диполь $\mathbf{N}_{e01}(p_z)$, которого нет в составе плоской волны.

Теперь проанализируем результаты моделирования из подраздела 2.2 и сравним их с теоретическими выкладками. На рисунке 11 (в) мы видим, что для x-поляризованной волны вдоль направления y (k_y, E_x) электрический диполь содержит составляющую не только в направлении падающего электрического поля (x), но также и вдоль направления

падения (y). Следовательно, электромагнитный отклик частицы содержит как $\mathbf{N}_{e11}(p_x)$, так и $\mathbf{N}_{o11}(p_y)$. Рисунок 11 (г) показывает, что для плоской волны (k_y, E_z) , у магнитного диполя в отклике частицы присутствует компоненты $m_x(\mathbf{M}_{e11})$ и $m_y(\mathbf{M}_{o11})$. На рисунке 11 (б) видно, что при воздействии на призму с равнобедренным треугольником в основании плоской волны с конфигурацией (k_z, E_x) , в отклике у электрического диполя возникает компонента вдоль падающего электрического поля и вдоль направления падения. То есть $p_x(\mathbf{N}_{e11})$ и $p_z(\mathbf{N}_{e01})$. Результаты моделирования для плоской волны (k_z, E_y) приведены на рисунке 11 (а). Видно, что у магнитного диполя есть компоненты $m_x(\mathbf{M}_{e11})$ и $m_z(\mathbf{M}_{e01})$. Все приведенные выше результаты моделирования подтверждают теорию.

3.5 Облучение одиночными мультиполями

В данном подразделе с помощью численного моделирования мы демонстрируем, что для случая призмы с равносторонним треугольником в основании диполь в отклике может появляться благодаря наличию квадруполь в мультипольном разложении света, воздействующего на частицу, но не возбуждается другим диполем. При этом для случая призмы с равнобедренным треугольником в основании диполь возбуждается за счет другого диполя. Для этого мы облучаем обе наши частицы таким образом, что в мультипольном разложении падающего излучения содержится только 1 мультиполь. Селективное возбуждение конкретных мультиполей уже обсуждалось в некоторых работах [44, 45], которые содержат технические детали реализации такого излучения и его применение.

В подразделе 3.3 было показано, что для частицы с симметрией D_{3h} электрический диполь не может возбуждаться магнитным, и наоборот. Также в подразделе 2.1 было показано, что для бокового падения (волновой вектор по y) плоской волны у частицы в форме призмы с равносторонним треугольником в основании в отклике возникают неосновные компоненты диполей, направленные не вдоль соответствующих падающих полей, а вдоль направления падения света. Поэтому рассмотрим

отдельно конфигурации плоской волны (k_y, E_x) и (k_y, E_z) . Как уже было отмечено, конфигурация плоской волны (k_y, E_x) содержит следующие мультиполи: $\mathbf{N}_{e11}, \mathbf{N}_{o22}, \mathbf{M}_{e01}, \mathbf{M}_{o12}$. На рисунке 16 (а),(б) видно, что диполи из данной волны по отдельности не возбуждают в частице других диполей. При этом на рисунке 16 (в) продемонстрировано, что квадруполь \mathbf{N}_{o22} возбуждает в электромагнитном отклике диполь p_y . Так как данный квадруполь входит в состав плоской волны (k_y, E_x) , мы приходим к выводу, что теоретические выкладки и моделирование дали нам правильные результаты.

Аналогичные рассуждения проводим и для конфигурации плоской волны (k_y, E_z) , которая включает в себя следующие ВСГ: $\mathbf{N}_{e01}, \mathbf{M}_{e11}, \mathbf{N}_{o12}, \mathbf{M}_{o22}$. На рисунке 16 (г),(д) видно, что диполи из данной волны по отдельности не возбуждают в частице других диполей. При этом на рисунке 16 (в) продемонстрировано, что квадруполь \mathbf{M}_{o22} возбуждает в электромагнитном отклике диполь m_y . Этот результат подтверждает теорию и моделирование.

Теперь рассмотрим отклик частицы с симметрией C_{2v} , то есть в форме призмы с равнобедренным треугольником в основании, на излучение одиночных мультиполей. В подразделе 3.4 было показано, что для частицы данной симметрии возникает "диполь-диполь" бианизотропия или иными словами - диполь в падающей волне возбуждает в отклике диполь другой природы, который не входил в состав падающего излучения. Данное явление наблюдалось для всех четырех рассмотренных в данной работе конфигураций плоских волн: $(k_y, E_x), (k_y, E_z), (k_z, E_x), (k_z, E_y)$. Отметим, что данный результат является логичным, так как каждая из этих конфигураций содержала в себе один из диполей мод B_1 или B_2 , но при этом не содержала второй. Для сравнения с приведенным выше случаем равносторонней призмы рассмотрим облучение равнобедренной призмы диполями \mathbf{N}_{e01} и \mathbf{M}_{e01} . На рисунке 17 видно, что в отличие от случая равносторонней призмы, для равнобедренной призмы при воздействии на нее данными мультиполями в отклике появляются другие диполи, что и было предсказано теорией в подразделе 3.4.

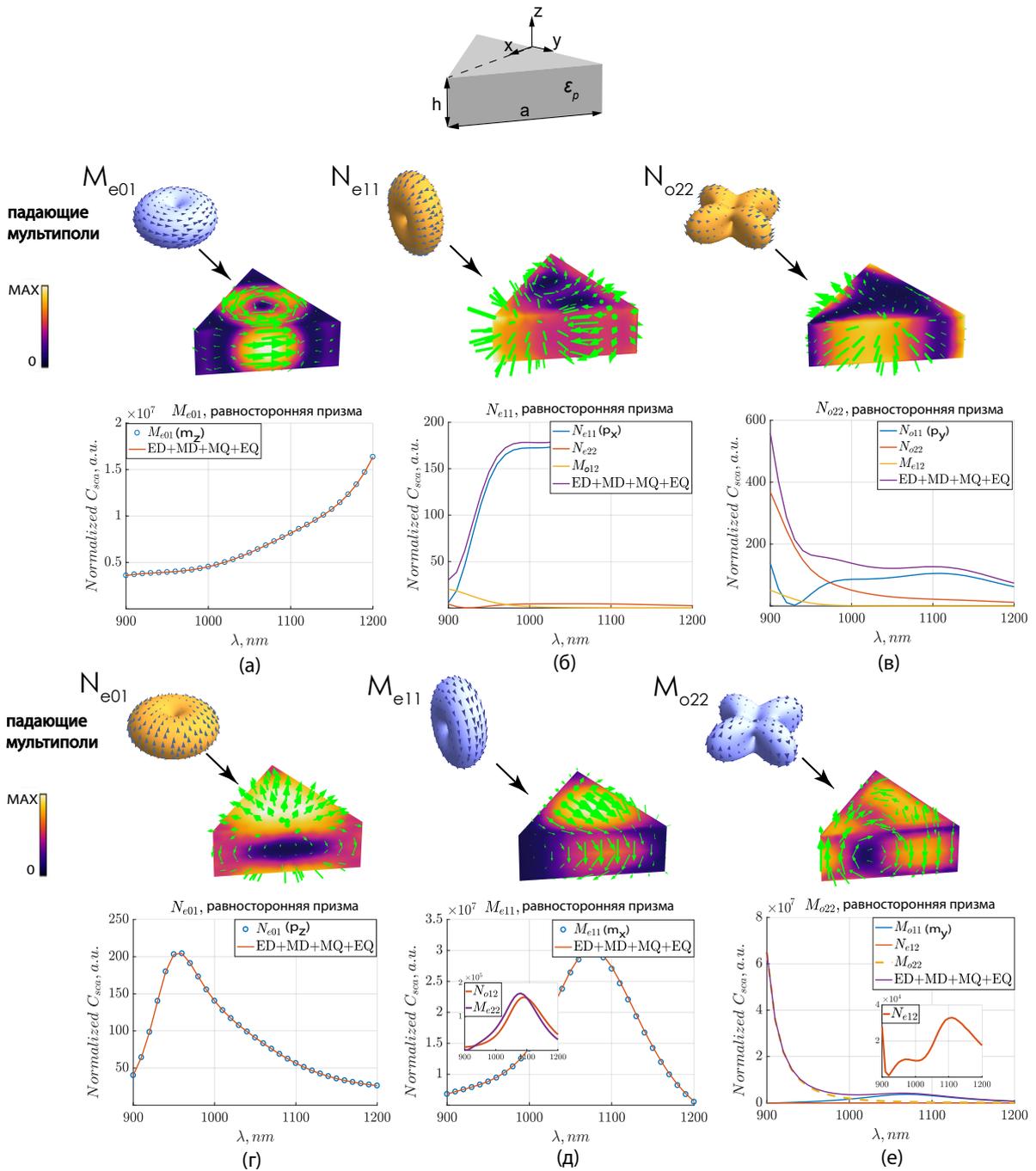


Рисунок 16 — Спектр ненулевых компонент электромагнитного отклика и распределение модуля электрического поля на длине волны $\lambda = 1050$ нм при облучении равносторонней призмы (а) магнитным диполем M_{e01} , (б) электрическим диполем N_{e11} , (в) электрическим квадруполем N_{o22} , (г) электрическим диполем N_{e01} , (д) магнитным диполем M_{e11} , (е) магнитным квадруполем M_{o22} . Зеленые стрелки отвечают за направление электрического поля и пропорциональны его амплитуде. Для удобства над основными графиками в виде вставок приведены распределения угловых частей дальних полей падающих мультиполей

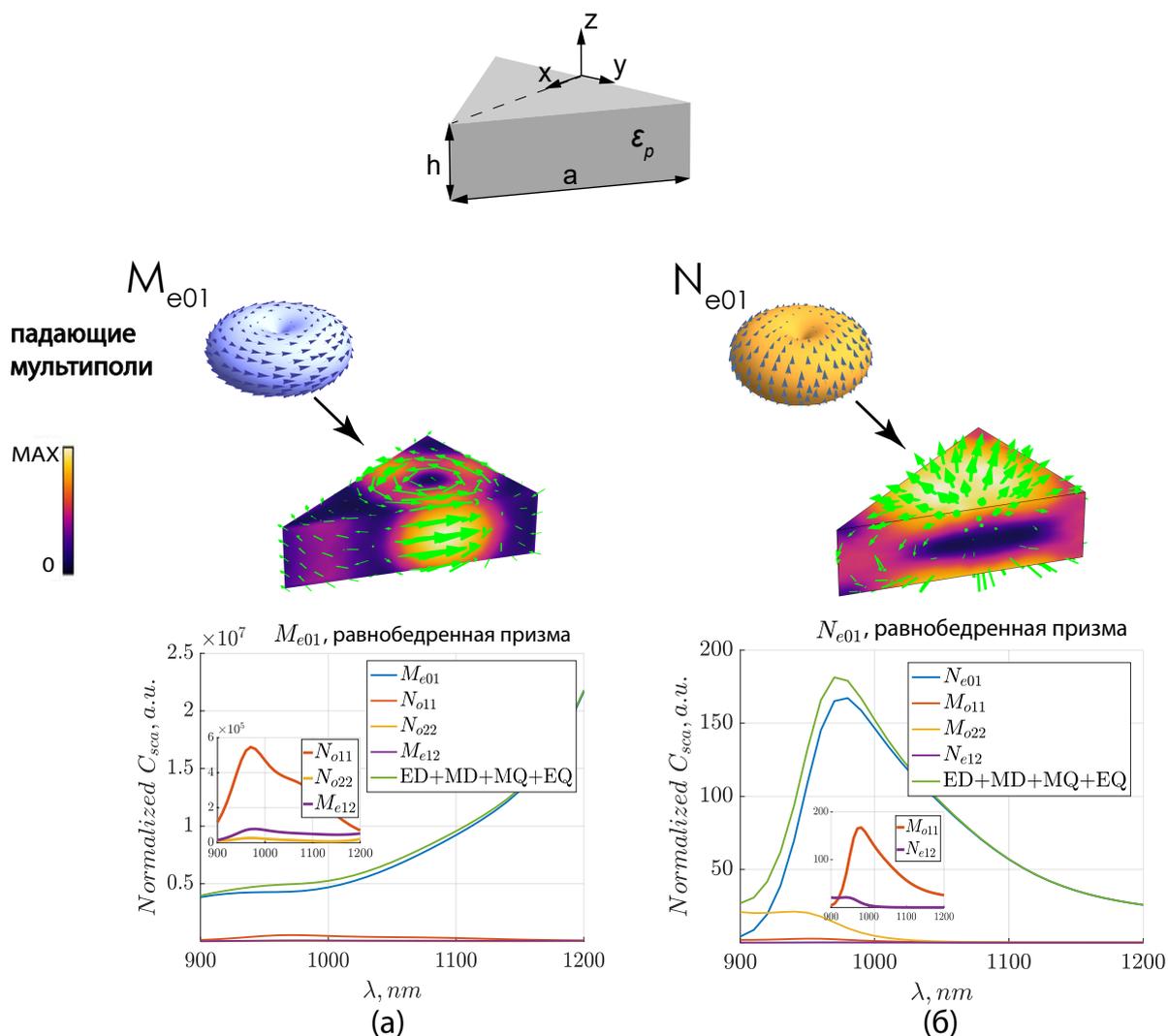


Рисунок 17 — Спектр ненулевых компонент электромагнитного отклика и распределение модуля электрического поля на длине волны $\lambda = 1050$ нм при облучении равносторонней призмы (а) магнитным диполем M_{e01} , (б) электрическим диполем N_{e01} . Зеленые стрелки отвечают за направление электрического поля, и пропорциональны его амплитуде. Для удобства над основными графиками в виде вставок приведены распределения угловых частей дальних полей падающих мультиполей

Таким образом, в данной главе было показано, что в равносторонней призме наблюдается классическая "диполь-дипольная" бианизотропия, при этом в равносторонней призме электромагнитный отклик внешне выглядит аналогично, но по сути является "квадруполь-дипольной" бианизотропией.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было проведено исследование электромагнитного отклика частиц в форме треугольных призм с равнобедренным и равносторонним треугольниками в основании двумя способами. Первый способ заключался в моделировании и мультипольном разложении в программном обеспечении COMSOL Multiphysics™. В результате моделирования для равносторонней призмы мы получили, что в отклике частицы при боковом облучении присутствуют вклады диполей, параллельные направлению падения, а не падающим полям той же природы. И хотя такое возбуждение неосновных компонент зачастую является проявлением "классической" бианизотропии в локальной дипольной модели, в случае призмы с равносторонним треугольником в основании такая модель оказалась неприменимой, потому что при падении света нормально к основанию у диполей возбуждались лишь основные компоненты. При этом для равнобедренной призмы и при боковом, и при нормальном к основанию падениях наблюдались неосновные компоненты диполей, параллельные направлению падения света.

Второй способ включал в себя мультипольный анализ собственных мод частиц и модовый анализ их отклика. В данном исследовании мы предложили метод определения мультипольного состава собственных мод частиц любой симметрии. Для призм предложенный нами метод показал, что для бокового падения на призму с равносторонним треугольником в основании диполь, возбуждающийся вдоль направления падения, появляется за счет квадрупольной природы той же природы. При этом для равнобедренной призмы неосновная компонента диполей появлялась за счет диполя другой природы. Результаты обоих методов подтвердили друг друга. Таким образом, в случае равнобедренной призмы у нас наблюдалась "классическая" "диполь-дипольная" бианизотропия. При этом для равносторонней призмы при внешнем сходстве отклика у нас возникала "квадруполь-дипольная" бианизотропия, то есть, действительно, рассмотрение лишь локальных падающих полей было недостаточно для анализа данной системы. Заметим, что такое поведение отклика возможно только при отсутствии центра пространственной инверсии у рассматри-

ваемой частицы, потому что только в таком случае два мультиполя противоположной четности при пространственной инверсии могут попасть в одну моду, и впоследствии возбудить друг друга (диполи разной природы имеют разную четность, диполь и квадруполь одинаковой природы имеют разную четность). Стоит отметить, что с помощью предложенного нами общего метода мультипольной классификации мод можно объяснить "природу" бианизотропного отклика и предсказать его индуцирование для любой геометрии частицы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Towards all-dielectric metamaterials and nanophotonics / Alexander Krasnok, Sergey Makarov, Mikhail Petrov et al. // *Metamaterials X*. — International Society for Optics and Photonics, 2015. — May. — Vol. 9502. — P. 950203.
2. *Jahani, Saman*. All-dielectric metamaterials / Saman Jahani, Zubin Jacob // *Nat. Nanotechnol.* — 2016. — Jan. — Vol. 11, no. 1. — Pp. 23–36.
3. Magnetic light / Arseniy I. Kuznetsov, Andrey E. Miroshnichenko, Yuan Hsing Fu et al. // *Sci. Rep.* — 2012. — Jul. — Vol. 2, no. 492. — Pp. 1–6.
4. *Evlyukhin, Andrey B.* Multipole light scattering by nonspherical nanoparticles in the discrete dipole approximation / Andrey B. Evlyukhin, Carsten Reinhardt, Boris N. Chichkov // *Phys. Rev. B*. — 2011. — Dec. — Vol. 84, no. 23. — P. 235429.
5. Multipole analysis of light scattering by arbitrary-shaped nanoparticles on a plane surface / Andrey B. Evlyukhin, Carsten Reinhardt, Egor Evlyukhin, Boris N. Chichkov // *J. Opt. Soc. Am. B, JOSAB*. — 2013. — Oct. — Vol. 30, no. 10. — Pp. 2589–2598.
6. Optical spectroscopy of single Si nanocylinders with magnetic and electric resonances / Andrey B. Evlyukhin, René L. Eriksen, Wei Cheng et al. // *Sci. Rep.* — 2014. — Feb. — Vol. 4, no. 4126. — Pp. 1–7.
7. Multipolar response of nonspherical silicon nanoparticles in the visible and near-infrared spectral ranges / Pavel D. Terekhov, Kseniia V. Baryshnikova, Yuriy A. Artemyev et al. // *Phys. Rev. B*. — 2017. — Jul. — Vol. 96, no. 3. — P. 035443.
8. *Yurkin, M. A.* The discrete dipole approximation: An overview and recent developments / M. A. Yurkin, A. G. Hoekstra // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*. — 2007. — Jul. — Vol. 106, no. 1. — Pp. 558–589.
9. Transverse Scattering and Generalized Kerker Effects in All-Dielectric Mie-Resonant Metaoptics / Hadi K. Shamkhi, Kseniia V. Baryshnikova, Andrey Sayanskiy et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2019. — May. —

Vol. 122, no. 19. — P. 193905.

10. *Asadchy, Viktor S.* Bianisotropic metasurfaces: physics and applications / Viktor S. Asadchy, Ana Díaz-Rubio, Sergei A. Tretyakov // *Nanophotonics*. — 2018. — Jun. — Vol. 7, no. 6. — Pp. 1069–1094.

11. *Bobylev, Daniel A.* Nonlocal response of Mie-resonant dielectric particles / Daniel A Bobylev, Daria A Smirnova, Maxim A Gorlach // *Physical Review B*. — 2020. — Vol. 102, no. 11. — P. 115110.

12. Purely bianisotropic scatterers / M. Albooyeh, V. S. Asadchy, R. Alaee et al. // *Phys. Rev. B*. — 2016. — Dec. — Vol. 94, no. 24. — P. 245428.

13. Bianisotropy for light trapping in all-dielectric metasurfaces / Andrey B. Evlyukhin, Vladimir R. Tuz, Valentyn S. Volkov, Boris N. Chichkov // *Phys. Rev. B*. — 2020. — May. — Vol. 101, no. 20. — P. 205415.

14. *Wang, Meng.* Symmetry-protected dual quasi-bound states in the continuum with high tunability in metasurface / Meng Wang, Baoying Li, Wudeng Wang // *J. Opt.* — 2020. — Nov. — Vol. 22, no. 12. — P. 125102.

15. All-dielectric reciprocal bianisotropic nanoparticles / Rasoul Alaee, Mohammad Albooyeh, Aso Rahimzadegan et al. // *Phys. Rev. B*. — 2015. — Dec. — Vol. 92, no. 24. — P. 245130.

16. Theory, design, and experimental verification of a reflectionless bianisotropic Huygens' metasurface for wide-angle refraction / Michael Chen, Elena Abdo-Sánchez, Ariel Epstein, George V. Eleftheriades // *Phys. Rev. B*. — 2018. — Mar. — Vol. 97, no. 12. — P. 125433.

17. Substrate-Induced Resonant Magnetoelectric Effects for Dielectric Nanoparticles / Andrey E. Miroschnichenko, Andrey B. Evlyukhin, Yuri S. Kivshar, Boris N. Chichkov // *ACS Photonics*. — 2015. — Oct. — Vol. 2, no. 10. — Pp. 1423–1428.

18. *Sieck, Caleb F.* Origins of Willis coupling and acoustic bianisotropy in acoustic metamaterials through source-driven homogenization / Caleb F. Sieck, Andrea Alù, Michael R. Haberman // *Phys. Rev. B*. — 2017. — Sep. — Vol. 96, no. 10. — P. 104303.

19. Systematic design and experimental demonstration of bianisotropic metasurfaces for scattering-free manipulation of acoustic wavefronts / Junfei Li, Chen Shen, Ana Díaz-Rubio et al. // *Nat. Commun.* — 2018. — Apr. — Vol. 9, no. 1342. — Pp. 1–9.
20. *Díaz-Rubio, A.* Acoustic metasurfaces for scattering-free anomalous reflection and refraction / A. Díaz-Rubio, S. A. Tretyakov // *Phys. Rev. B.* — 2017. — Sep. — Vol. 96, no. 12. — P. 125409.
21. *Popa, Bogdan-Ioan.* Broadband sound barriers with bianisotropic metasurfaces / Bogdan-Ioan Popa, Yuxin Zhai, Hyung-Suk Kwon // *Nat. Commun.* — 2018. — Dec. — Vol. 9, no. 5299. — Pp. 1–7.
22. *Habibullah, Yusuf B.* Second-harmonic generation from complementary Au metasurfaces with triangular resonators / Yusuf B. Habibullah, Kengo Iwata, Teruya Ishihara // *J. Opt. Soc. Am. B, JOSAB.* — 2019. — Apr. — Vol. 36, no. 4. — Pp. 1166–1175.
23. Second Harmonic Generation from Phase-Engineered Metasurfaces of Nanoprisms / Kanta Mochizuki, Mako Sugiura, Hirofumi Yogo et al. // *Micromachines.* — 2020. — Sep. — Vol. 11, no. 9. — P. 848.
24. *Gladyshev, Sergey.* Symmetry analysis and multipole classification of eigenmodes in electromagnetic resonators for engineering their optical properties / Sergey Gladyshev, Kristina Frizyuk, Andrey Bogdanov // *Phys. Rev. B.* — 2020. — Aug. — Vol. 102, no. 7. — P. 075103.
25. A condition imposed on the electromagnetic polarizability of a bianisotropic lossless scatterer / P. A. Belov, S. I. Maslovski, K. R. Simovski, S. A. Tretyakov // *Tech. Phys. Lett.* — 2003. — Sep. — Vol. 29, no. 9. — Pp. 718–720.
26. Magnetolectric point scattering theory for metamaterial scatterers / Ivana Sersic, Christelle Tuambilangana, Tobias Kampfrath, A. Femius Koenderink // *Phys. Rev. B.* — 2011. — Jun. — Vol. 83, no. 24. — P. 245102.
27. *Achouri, Karim.* Extension of Lorentz Reciprocity and Poynting Theorems for Spatially Dispersive Media with Quadrupolar Responses / Karim Achouri, Olivier J. F. Martin // *arXiv:2102.08197.* — 2021. — Feb. <https://arxiv.org/abs/2102.08197v1>.

28. Optical theorem and multipole scattering of light by arbitrarily shaped nanoparticles / Andrey B. Evlyukhin, Tim Fischer, Carsten Reinhardt, Boris N. Chichkov // *Phys. Rev. B.* — 2016. — Nov. — Vol. 94, no. 20. — P. 205434.
29. *Palik, Edward D.* Handbook of optical constants of solids / Edward D Palik. — Academic press, 1998. — Vol. 3.
30. *Alaee, Rasoul.* An electromagnetic multipole expansion beyond the long-wavelength approximation / Rasoul Alaee, Carsten Rockstuhl, I. Fernandez-Corbaton // *Opt. Commun.* — 2018. — Jan. — Vol. 407. — Pp. 17–21.
31. *Evlyukhin, Andrey B.* Multipole decompositions for directional light scattering / Andrey B. Evlyukhin, Boris N. Chichkov // *Phys. Rev. B.* — 2019. — Sep. — Vol. 100, no. 12. — P. 125415.
32. Determining polarizability tensors for an arbitrary small electromagnetic scatterer / Viktor S. Asadchy, Igar A. Faniayeu, Younes Ra'di, Sergei A. Tretyakov // *Photonics Nanostruct. Fundam. Appl.* — 2014. — Aug. — Vol. 12, no. 4. — Pp. 298–304.
33. On the constraints of electromagnetic multipoles for symmetric scatterers: eigenmode analysis / Zhongfei Xiong, Zhongfei Xiong, Qingdong Yang et al. // *Opt. Express.* — 2020. — Feb. — Vol. 28, no. 3. — Pp. 3073–3085.
34. *Sólyom, Jenő.* Fundamentals of the Physics of Solids / Jenő Sólyom. — Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2007.
35. *Ivchenko, Eougenious L.* Superlattices and Other Heterostructures / Eougenious L. Ivchenko, Grigory Pikus. — Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1997.
36. Character Tables for Point Groups http://gernot-katzers-spice-pages.com/character_tables. — 2016. — Jan. — [Online; accessed 6. Mar. 2021]. http://gernot-katzers-spice-pages.com/character_tables.
37. Character tables for chemically important point groups <http://symmetry.jacobs-university.de>. — 2019. — Aug. — [Online; accessed 6. Mar. 2021]. <http://symmetry.jacobs-university.de>.

38. *Contributors to Wikimedia projects*. Spherical harmonics - Wikipedia. — 2021. — Feb. — [Online; accessed 7. Mar. 2021]. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Spherical_harmonics&oldid=1009033980.

39. *Bohren, Craig F.* Absorption and Scattering of Light by Small Particles / Craig F. Bohren, Donald R. Huffman. — Hoboken, NJ, USA: Wiley, 1998. — Mar. <https://www.wiley.com/en-us/Absorption+and+Scattering+of+Light+by+Small+Particles-p-9780471293408>.

40. *Contributors to Wikimedia projects*. Vector spherical harmonics. — 2021. — Feb. — [Online; accessed 6. Mar. 2021]. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Vector_spherical_harmonics&oldid=1008473655.

41. Classification of atomic-scale multipoles under crystallographic point groups and application to linear response tensors / Satoru Hayami, Megumi Yatsushiro, Yuki Yanagi, Hiroaki Kusunose // *Phys. Rev. B*. — 2018. — Oct. — Vol. 98, no. 16. — P. 165110.

42. *Doost, M. B.* Resonant-state expansion applied to three-dimensional open optical systems / M. B. Doost, W. Langbein, E. A. Muljarov // *Phys. Rev. A*. — 2014. — Jul. — Vol. 90, no. 1. — P. 013834.

43. *Grahn, P.* Electromagnetic multipole theory for optical nanomaterials / P. Grahn, A. Shevchenko, M. Kaivola // *New J. Phys.* — 2012. — Sep. — Vol. 14, no. 9. — P. 093033.

44. Selective Third-Harmonic Generation by Structured Light in Mie-Resonant Nanoparticles / Elizaveta V. Melik-Gaykazyan, Sergey S. Kruk, Rocio Camacho-Morales et al. // *ACS Photonics*. — 2018. — Mar. — Vol. 5, no. 3. — Pp. 728–733.

45. Beam engineering for selective and enhanced coupling to multipolar resonances / Tanya Das, Prasad P. Iyer, Ryan A. DeCrescent, Jon A. Schuller // *Phys. Rev. B*. — 2015. — Dec. — Vol. 92, no. 24. — P. 241110.